Matemática Discreta

Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos

Domingos Moreira Cardoso

Jerzy Szymański

Mohammad Rostami

Aveiro 2008

Conteúdo

Introdução

Matemática discreta é uma área da matemática que, ao longo das últimas décadas, se tem revelado de interesse crescente para um grande número de investigadores e estudantes em todo o mundo e que, neste período, tem tido um desenvolvimento exponencial. A este facto não são alheias as suas múltiplas aplicações, nomeadamente, nas *ciências da computação*, da qual também tem recebido muitas das suas principais motivações. Adicionalmente, as aplicações da matemática discreta estendem-se a áreas tais como: *as biociências*, *telecomunicações*, *electrónica*, *indústria de processadores*, *desenho de circuitos integrados*, *criptografia e segurança na transmissão de comunicações*, *sistemas de tráfego* automóvel ou outro, etc. Por outro lado, a influência recíproca da matemática discreta com outras áreas da matemática é cada vez mais visível, como no caso da *investigação operacional*, *álgebra*, *teoria dos números*, *geometria* e *topologia*. O crescimento da matemática discreta obrigou à sua actual divisão em duas grandes áreas: a *combinatória* e a *teoria dos grafos*. É surpreendente o modo como a matemática discreta lida com processos que consistem em sequências de estados separados, ou conjuntos numeráveis (ou seja, contáveis) de objectos, onde se incluem, naturalmente, os conjuntos finitos, com padrões comuns, em muitos casos difíceis de identificar sem recurso às suas poderosas técnicas de análise. A enumerabilidade dos objectos de estudo é responsável pela designação de matemática *discreta* em oposição a *contínua*. No caso particular das estruturas finitas, entre os seus vários instrumentos de análise, devem salientar-se a *álgebra finita* (que inclui grupos, reticulados e corpos finitos), a *geometria finita* (que inclui a geometria projectiva e a geometria afim) e a *topologia finita* (que inclui a topologia digital), pelo papel de relevo que desempenham no respectivo contexto de actuação.

Objectivos

Este livro inclui os tópicos mais importantes em matemática discreta, os quais, na sua grande maioria, são apresentados a um nível intermédio, acessível à generalidade dos estudantes detentores de uma formação matemática básica ao nível do ensino secundário ou dos primeiros anos da universidade (no caso de alguns capítulos). No entanto, a necessidade de uma certa abrangência levou-nos a considerar tópicos mais avançados (que podem integrar cursos de pós-graduação) que, numa primeira leitura, devem ser ignorados por principiantes sem maturidade matemática suficiente. Podemos afirmar, porém, que este livro é auto-contido, no sentido em que inclui toda a informação necessária para a sua compreensão, a qual, convenientemente trabalhada, permitirá ao leitor atingir um nível de estudos adequado, no contexto da matemática discreta. Pretende-se também que este livro desperte, em muitos dos jovens estudantes, o interesse pela matemática e suas aplicações, captando-os e motivando-os para o seu aprofundamento. Com efeito, o facto de aqui se cruzarem várias das áreas mais relevantes da matemática, transforma este livro num instrumento privilegiado para um primeiro contacto com a linguagem, os conceitos e as metodologias mais actuais da matemática superior e da ciência em geral.

Embora a formação abrangente em matemática discreta seja o principal objectivo deste livro, por razões de espaço, ele não é suficientemente exaustivo para incluir todos os tópicos que, actualmente, fazem parte da matemática discreta. Assim, ficaram de fora do âmbito deste texto, a *teoria dos códigos*, *criptografia*, *estruturas de dados*, *partições de inteiros e de conjuntos*, *estruturas aleatórias*, *teoria algébrica dos grafos*, *complexidade de algoritmos*, etc.

Para além dos cursos de matemática, este livro pode ser utilizado, de um modo geral, nos cursos de ciências e engenharia e, com especial importância, nos cursos de computação e informática.

A escolha dos tópicos, exercícios, aplicações e algoritmos, bem como a sua apresentação, foi dominada por muitos anos de experiência docente a diferentes níveis, para estudantes de diferentes cursos e com preparação distinta. Como resultado, este livro contém uma sequência de exemplos cuidadosamente escolhidos, acompanhados de resoluções detalhadas. No seu conjunto, eles constituem um caminho didáctico, com grau de dificuldade crescente, no qual se ilustra, de forma sistemática, o modo de se ultrapassarem dificuldades, o que é de grande utilidade para a compreensão da generalidade dos tópicos abordados. Note-se que em algumas secções, muitos conceitos e propriedades são introduzidos com recurso, exclusivo, a exemplos.

Os exercícios propostos, por sua vez, quer em número quer em qualidade, desempenham um papel central no método de estudo a levar a cabo. Com efeito, ao longo dos capítulos, recomenda-se vivamente a resolução sistemática de, pelo menos, parte deles.

Destinatários.

Os principais destinatários deste livro são, naturalmente, os estudantes dos primeiros anos da universidade e, para além destes, os professores de matemática ou de informática do ensino secundário (que aqui podem obter, não só uma actualização de conhecimentos, como também a motivação necessária para a formulação de problemas e para a apresentação de exemplos de interesse prático e didáctico aos seus alunos) e os professores do ensino superior, directa ou indirectamente, ligados à investigação matemática. Alguns capítulos, como são o caso dos que constituem a parte III, *Abordagens Algébricas da Combinatória*, e alguns dos que constituem a parte IV, *Teoria dos Grafos e Algoritmos*, podem ainda ser de grande utilidade como textos de apoio em cursos de pós-graduação ao nível de mestrado. Estes capítulos, incluem tópicos onde se apresentam problemas em aberto que fazem parte dos grandes desafios da investigação matemática contemporânea.

Conteúdo.

O livro está organizado em quatro partes principais. A parte I sobre conceitos e resultados gerais, a parte II sobre combinatória, a parte III sobre abordagens algébricas da combinatória e a parte IV sobre teoria dos grafos e algoritmos.

A parte I é constituída por dois capítulos. O primeiro capítulo inclui a notação básica e, após uma introdução à lógica proposicional, faz uma apresentação de tópicos elementares abstractos, passando pelo estudo de conjuntos (operações sobre conjuntos, conjuntos parcialmente ordenados e cardinalidade de conjuntos) e relações (relações de ordem, relações de equivalência e funções), analisando-se alguns resultados importantes, como são o caso dos teoremas de Tarski, Cantor e Schröder-Bernstein. O segundo capítulo é dedicado às técnicas de demonstração utilizadas em matemática, onde a lógica formal é utilizada para fundamentar directa ou indirectamente os respectivos métodos de prova, destacando-se, na parte final, a indução matemática e o princípio da gaiola dos pombos que é uma ferramenta essencial para muitos problemas de existência em matemática.

A parte II, que incide sobre a combinatória (que é uma área da matemática dedicada à enumeração e estudo de agrupamentos de objectos de acordo com certas regras específicas), é constituída por quatro capítulos (entre os capítulos 3 e 6). No capítulo 3 discutem-se, detalhadamente, os quatro princípios de enumeração mais utilizados em combinatória. O capítulo 4 lida com a contagem de agrupamentos particulares, como são o caso das combinações, permutações e arranjos (com ou sem repetição) e inclui o estudo de algumas identidades combinatórias. O capítulo 5 é dedicado ao estudo das equações de recorrência e das funções geradoras que são instrumentos muito poderosos, utilizados em problemas de contagem. No capítulo 6 estudam-se algumas famílias de números combinatórios.

A parte III, que cobre várias abordagens algébricas em matemática discreta, é constituída por cinco capítulos (entre os capítulos 7 e 11). O capítulo 7 é dedicado ao estudo aprofundado dos conjuntos parcialmente ordenados, incluindo o estudo dos reticulados, topologias finitas, cadeias, anticadeias, teorema de Dilworth, teorema da inversão de Möbius, etc. No capítulo 8 dá-se especial atenção às funções de Euler e de Möbius (agora na sua versão clássica), ao teorema de Daniel da Silva (que constitui uma generalização do teorema de Euler), às relações de congruência, aos polinómios e corpos finitos, aos corpos de Galois e, finalmente, aos quadrados latinos e mágicos. No capítulo 9 estudam-se os *designs* combinatórios e as geometrias finitas (afins e projectivas) e suas ligações com os quadrados latinos e as matrizes de Hadamard. No capítulo 10 estudam-se, detalhadamente, as álgebras de Boole (que são reticulados muito especiais), discutindo-se, nomeadamente, o teorema da representação (para o caso finito), as funções booleanas e os mapas de Karnaugh com grande aplicação no desenho e projecto de circuitos digitais. O capítulo 11 é dedicado aos grupos finitos (nomeadamente, ao grupo diedral) e a certos problemas de enumeração combinatória de objectos com relações de simetria entre si, cuja resolução obriga à utilização do lema de Burnside ou do teorema de Pólya e que são difíceis de resolver com recurso aos métodos de contagem introduzidos em capítulos anteriores.

A parte IV é constituída por nove capítulos (entre os capítulos 12 e 20) cobrindo diferentes tópicos da teoria dos grafos e incluindo algoritmos para a resolução dos principais problemas de aplicação que se colocam no respectivo contexto. No capítulo 12 introduzem-se conceitos e resultados básicos fundamentais para a compreensão dos capítulos subsequentes. O capítulo 13 é dedicado ao estudo da conexidade em grafos e inclui algoritmos para a determinação de componentes conexas e fortemente conexas no caso de grafos orientados. No capítulo 14 estudam-se os caminhos, aprofundando-se os conceitos e resultados métricos, anteriormente abordados no capítulo 12, estudam-se majorantes e minorantes para a ordem dos grafos, em função de certas propriedades métricas, e caracterizam-se os grafos para os quais estes majorantes e minorantes são atingidos. Adicionalmente, introduzem-se vários algoritmos para a determinação de caminhos de comprimento mínimo (nomeadamente, a pesquisa em largura para grafos sem custos nas arestas, o algoritmo de Dijkstra para grafos ou digrafos com custos não negativos e os algoritmos de Bellman-Ford e de Floyd para grafos e digrafos com custos arbitrários). No capítulo 15 estudam-se as árvores que são grafos com propriedades particulares e que têm muitas aplicações em problemas práticos, estuda-se a determinação do número de árvores abrangentes de um grafo e respectiva geração, deduz-se o código de Prüfer, e descrevem-se e fundamentam-se os algoritmos de Kruskal e de Prim para a determinação de árvores abrangentes de custo mínimo. O capítulo 16 é dedicado ao estudo do fluxo em redes e inclui a análise do algoritmo de Ford-Fulkerson (de fluxo máximo corte mínimo) e o método simplex para redes, vocacionado para a determinação de fluxos de custo mínimo. No capítulo 17 estudam-se os emparelhamentos e algumas das suas aplicações, incluindo os respectivos algoritmos para a determinação de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos e grafos arbitrários, com e sem pesos nas arestas. No capítulos 18 estudam-se os grafos eulerianos e hamiltonianos e alguns algoritmos de resolução de problemas práticos para os quais constituem modelos matemáticos adequados, como são os casos do problema do carteiro chinês, a determinação de códigos de Grey e o problema do caixeiro viajante. Para o problema do carteiro chinês, estudam-se os algoritmos de Hierholtzer e de Fleury, para o problema do caixeiro viajante, estuda-se o algoritmo clássico de *branch and bound* de Little, Marty, Sweeney e Karel e ainda o algoritmo de *premiar e punir*. No capítulo 19 estudam-se os conjuntos independentes de vértices, as cliques, as colorações de vértices (incluindo a sua abordagem como aplicação das funções booleanas), os polinómios cromáticos e as extensões cromáticas de colorações parciais (com aplicação em problemas relacionados com o puzzle Sudoku que é proposto à generalidade dos leitores de muitos jornais e revistas) e as colorações de arestas, conjuntamente com uma introdução aos números de Ramsey. A quarta parte termina com o capítulo 20, dedicado aos grafos planares e suas generalizações, que se inicia com uma abordagem topológica dos grafos, no contexto das suas realizações em superfícies orientáveis e dos seus menores. Neste capítulo, os grafos planares têm uma especial importância, estudando-se várias das suas propriedades, o teorema de Kuratowski, a dualidade e os grafos platónicos. Adicionalmente, analisam-se os grafos com genus positivo (incluindo a dedução da fórmula de Euler generalizada e os grafos g-platónicos), as colorações de mapas (incluindo o teorema das quatro cores, as colorações em superfícies de genus positivo e duas conjecturas que constituem grandes desafios nesta área).

Deste texto fazem parte ainda dois apêndices, um dedicado à utilização da notação assimptótica e à realização de várias operações com esta notação e outro com a lista de símbolos utilizados ao longo dos capítulos, e uma lista bibliográfica actualizada.

Precedência entre capítulos e modos de estudo

Com o objectivo de flexibilizar a leitura deste livro, os tópicos que aparecem após os capítulos 1, 2, 3 e 4 têm o maior grau de independência possível, como acontece no caso dos capítulos incluídos na parte III que (com poucas excepções) podem ser estudados independentemente uns dos outros. Inevitavelmente, porém, alguns capítulos dependem intrinsecamente dos anteriores, variando essa dependência de caso para caso. A parte IV, por exemplo, embora não dependa significativamente da parte III, é constituída por capítulos que, na sua generalidade, dependem sequencialmente uns dos outros. Com base nestas relações de dependência entre capítulos, para facilitar o estudo e para permitir uma leitura mais apropriada à formação pretendida e à respectiva maturidade matemática, seguem-se algumas sugestões para percursos alternativos.

Aos leitores que pretendem iniciar a sua formação matemática pós-secundária e detêm uma cultura matemática que se baseia, unicamente, na aprendizagem conseguida até ao 12º ano de escolaridade, para uma primeira leitura, recomenda-se o seguinte percurso: capítulos 1 a 6 (ou seja, as partes I e II) e os capítulos 12 a 15 da parte IV. Em leituras subsequentes, porém, já se recomenda uma passagem gradual por um cada vez maior número de capítulos da parte III e restantes capítulos da parte IV.

Aos leitores que frequentam disciplinas de matemática discreta nos primeiros anos da universidade, embora possam ignorar os primeiros dois capítulos, chama-se a atenção para o facto de uma revisão dos conceitos e metodologias ali abordados poder vir a fortalecer a sua capacidade de compreensão da matemática. Os capítulos das partes II, III e IV, devem ser percorridos de acordo com os tópicos estudados na disciplina, sem desrespeitar as regras de precedência anteriormente referidas. É claro que este livro pode servir de base ao programa da disciplina de matemática discreta a leccionar a diferentes cursos universitários de ciências e engenharia, como sejam, os cursos de matemática, ciências da computação, informática, etc. Neste caso, se a disciplina é leccionada num único semestre, sugere-se que os capítulos 1, 2 e 3 sejam abordados com uma cadência mais rápida, de modo que o tempo restante seja devidamente aproveitado para um estudo mais pausado dos capítulos 4, 5 e 6 e dos capítulos 12 a 15. Se a disciplina é leccionada durante dois semestres, dependendo dos seus objectivos, sugere-se que se acrescentem alguns capítulos das partes III e IV.

Os alunos de pós-graduação podem estudar grande parte dos capítulos deste livro numa disciplina anual (ou semestral, mas nesse caso, com ritmo muito elevado) que inclua todos os capítulos das partes III e IV, com demonstrações detalhadas.

Agradecimentos.

Os dois primeiros autores desejam expressar o seu agradecimento ao Centro de Estudos em Optimização e Controlo - CEOC, da Fundação para a Ciência e Tecnologia - FCT, co-financiado pela Comunidade Europeia FEDER/POCI 2010, o apoio financeiro por diversas vezes concedido nas múltiplas actividades realizadas ao longo de todo o período de preparação deste livro. Ao colega Marian Dondajewski pela preciosa ajuda que nos deu na preparação de muitas das figuras. Aos Professores do Departamento de Matemática Discreta da Universidade de Adam Mickiewicz, especialmente Jerzy Jaworski, Michał Karoński, Zbigniew Palka e Andrzej Ruciński, uma vez que muito dos exemplos e

exercícios deste livro são utilizados por todos eles e é quase impossível determinar o autor. A vários colegas do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, entre os quais: Agostinho Agra, Paula Rama, Paula Carvalho e Rosa Amélia Martins, pela leitura cuidada que fizeram de todo ou parte do livro, e pelas correcções e sugestões de vária ordem que melhoram a apresentação final deste texto. Apesar disso, ainda é possível que existam alguns erros até ao momento não detectados, relativamente aos quais, naturalmente, assumimos a inteira responsabilidade.

Às nossas companheiras Manela, Maria e Simin.

DMC, JS, MR

Aveiro, Fevereiro de 2008