Universidade de Aveiro

Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica II **Ano lectivo 2005/2006**

Folha Teórico-prática 7 - Geometria Analítica.

---

1. Sejam $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial real e $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ tais que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

   Mostre que:

   (a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;

   (b) $B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

2. Sejam $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$, A, B e C pontos do espaço afim $\mathcal{E}$ e u e v vectores do espaço vectorial E tais que $A + u = C = B + v$.

   Escreva $\overrightarrow{AB}$ como combinação linear de u e v.

3. Sejam $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{E}$ e $v_1, v_2, \cdots, v_k \in E$.

   Mostre que

   $$\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{E} : X = A + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

   é um subespaço afim de $\mathcal{E}$ associado ao subespaço vectorial $F = \langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle$.

4. Sejam E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, u e v dois vectores não nulos de E, $\mathcal{E}$ um espaço afim associado ao espaço vectorial E, P e Q dois pontos de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{R}_1 = P + \langle u \rangle$ e $\mathcal{R}_2 = Q + \langle v \rangle$ duas rectas de $\mathcal{E}$.

   Mostre que as rectas consideradas têm intersecção não vazia se e só se $\overrightarrow{PQ} \in \langle u, v \rangle$.

5. Seja $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$.

   (a) Defina recta de $\mathcal{E}$.

   (b) Suponha que $\mathcal{E}$ é o conjunto $\mathbb{R}^3$ e que E é o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

      i. Escreva uma equação cartesiana não paramétrica da recta r que passa pelo ponto $A = (1, -1, 1)$ e tem a direcção do vector $u = (1, a, b)$, onde a, b são parâmetros reais.

      ii. Seja s a recta que passa pelo ponto $B = (0, 0, 0)$ e tem a direcção do vector $v = (2, -1, b)$.
      Determine, se possível, uma relação entre $a, b \in \mathbb{R}$ por forma que as rectas r e s se intersectem num ponto.

6. Sejam $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{F} = P + \langle u \rangle$ e $\mathcal{G} = Q + \langle v \rangle$ dois subespaços afins de $\mathcal{E}$.

   Mostre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ se e só se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tais que $\overrightarrow{PQ} = \alpha u + \beta v$.

7. Sejam $\mathcal{E}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois subespaços afins de $\mathcal{E}$ associados aos subespaços vectoriais F e G, respectivamente.

   Mostre que se $\dim(F + G) = n$, então $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

8. Considere a recta $\mathcal{R}$ definida pelos pontos $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 3)$.

   Determine:

   (a) uma equação vectorial de $\mathcal{R}$;
   (b) um sistema de equações paramétricas de $\mathcal{R}$;
   (c) um sistema de equações normais de $\mathcal{R}$;
   (d) um sistema de equações reduzidas de $\mathcal{R}$.

9. Seja $\mathcal{P}$ o plano que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e contém a recta $\mathcal{R}$ representada pelo seguinte sistema de equações normais

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

   Determine:

   (a) uma equação vectorial de $\mathcal{R}$;
   (b) uma equação vectorial e uma equação geral do plano $\mathcal{P}$;
   (c) um sistema de equações normais da recta $\mathcal{R}'$ que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

10. Considere a recta $\mathcal{R}$ definida pelo seguinte sistema de equações não paramétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z\ .$$

   (a) Determine uma equação vectorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e é perpendicular à recta $\mathcal{R}$;
   (b) Verifique se a recta $\mathcal{S}$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, 8)$ e tem a direcção do vector $u = (1, -1, 1)$ está contida no plano $\mathcal{P}$.

11. Seja $\mathcal{P}$ o plano definido pelos pontos $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (1, 0, 1)$.

   Determine:

   (a) uma equação geral de $\mathcal{P}$;
   (b) um sistema de equações paramétricas e um sistema de equações reduzidas da recta $\mathcal{R}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e que passa pelo ponto B.

12. Escreva equações vectoriais dos planos que são definidos pelas seguintes equações gerais.

(a) $x + 5z = 2$

(b) $z = x - 2y$

(c) $3x - 2y + 4z = 6$

13. Considere a recta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações normais

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

(a) Escreva um sistema de equações paramétricas da recta $\mathcal{R}'$ paralela à recta $\mathcal{R}$ e que passa pelo ponto $A = (1, -2, 3)$.

(b) Escreva uma equação geral do plano que contém as rectas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.