II. Programação Linear (PL).
Capítulo 4.2

4.2.1. Mudança do ponto extremo.

O método *simplex* inclui um mecanismo de passagem dum ponto extremo a outro ponto extremo adjacente. Isto consegue-se substituindo na SBA correspondente uma variável básica (a variável básica que sai) por uma variável não básica (a variável não básica que entra).

Teorema:

Se X^o é ponto extremo, então a matriz A pode decompor-se em $A = \left[B^0 N^0\right]$ e

$$X^0 = \begin{bmatrix} X_B^0 \\ X_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_B^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B^0)^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

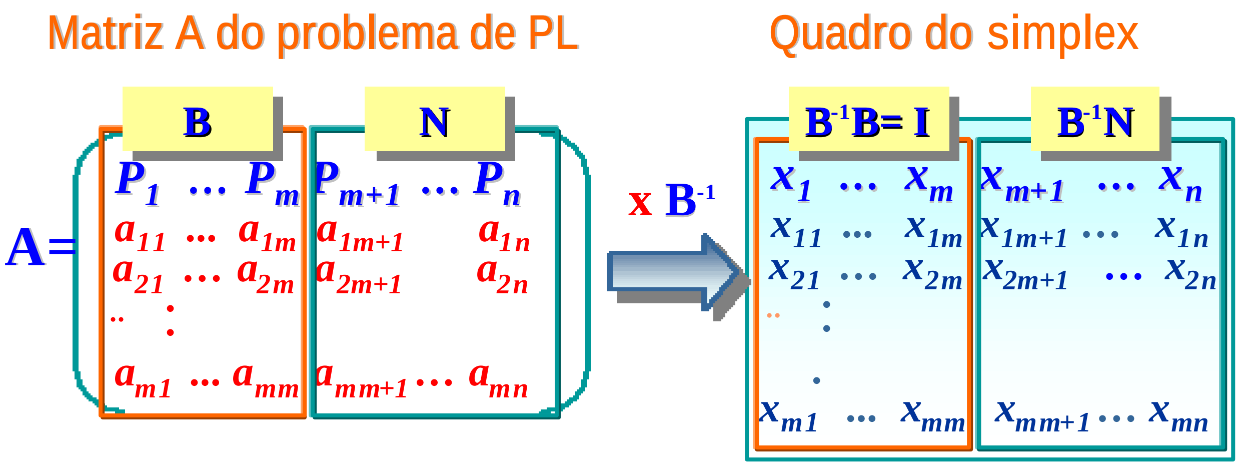
<u>*Prova:*</u>

$$\Rightarrow AX^0 = \left[B^0 N^0\right] \begin{bmatrix} X_B^0 \\ 0 \end{bmatrix} = B^0 X_B^0 + N^0 0 = b$$

multiplicando por $(B^0)^{-1} \Rightarrow \quad (B^0)^{-1}(B^0 X_B^0 + N^0 0) = (B^0)^{-1} b$

$$\Rightarrow X_B^0 = (B^0)^{-1} b$$

♦



As colunas do quadro do simplex {x_{1},…, x_m , x_{m+1} , … x_n } correspondem aos vectores P_j da matriz original A multiplicados pela inversa da base B.

II. Programação Linear (PL).
Capítulo 4.2

Seja um problema de PL e X^o um ponto extremo de K (conjunto das soluções admissíveis),ao que corresponde a SBA: $X^0 = [x_{10}, x_{20,}..., x_{m0}, 0,...0]^t$

Tem-se então:

$\Rightarrow$ $B^0 = [P_1, P_2, ..., P_m]$ - $\boldsymbol{P_j}$ vectores da base, $\boldsymbol{j} \in \{1,\ldots m\}$(são L.I.);

$N^0 = [P_{m+1}, P_{m+2}, ..., P_{m+n}]$ - $\boldsymbol{P_j}$ vectores fora da base, $\boldsymbol{j} \in \{m+1,\ldots n\}$;

$\Rightarrow$ $P_0 = b$

$$[P_1 P_2 ....P_m] X_B = [P_1 P_2 ....P_m]\ [x_{10} x_{20} ....x_{m0}]^t = x_{10} P_1 + x_{20} P_2 ... + x_{m0} P_m \ = P_o$$

$$P_0 = x_{10} P_1 + x_{20} P_2 ... + x_{m0} P_m \qquad (4.1.)$$

Qualquer vector P_j dentre os ***n*** dados se pode obter como combinação linear dos vectores da base

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 ... + x_{mj} P_m \qquad (4.2.)$$

Admita-se que algum vector fora da base $\boldsymbol{P_j}$, $\boldsymbol{j} \in \{m+1,\ldots n\}$ tem pelo menos uma componente $x_{ij}>0$ na expressão (4.2). Sem perda de generalidade, seja P_{m+1} este vector.

Multiplicando este vector por um escalar $\boldsymbol{q}$, convenientemente escolhido, e subtraindo de P_0 temos:

$$P_0 = x_{10} P_1 + x_{20} P_2 ... + x_{m0} P_m$$

$$-\boldsymbol{q}\ \mathbf{x}\quad P_{m+1} = x_{1m+1} P_1 + x_{2m+1} P_2 ... + x_{mm+1} P_m$$

$$P_o - q\ \ P_{m+1} = (x_{10} - q\ \ x_{1m+1}) P_1 + (x_{20} - q\ \ x_{2m+1}) P_2 ... + (x_{m0} - q\ \ x_{mm+1}) P_m$$

$$P_o = (x_{10} - \boldsymbol{q}\ \ x_{1m+1}) P_1 + (x_{20} - \boldsymbol{q}\ \ x_{2m+1}) P_2 ... + (x_{m0} - \boldsymbol{q}\ \ x_{mm+1}) P_m \ \ + \boldsymbol{q}\ \ P_{m+1} \qquad (4.3.)$$

Obtém-se um novo ponto X^1, tal que:

$$X_B^1 = [(x_{10} - qx_{1m+1}), (x_{20} - qx_{2m+1}), ..., (x_{m0} - qx_{mm+1}), q]^t$$

$$X_B^1 = [x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}]^t$$

O novo ponto X^1 é um ponto extremo, i.e. , X^1 é uma SBA do problema de PL?

Para provar que o ponto $\boldsymbol{X^1}$ é uma **SBA** do problema de PL temos de demonstrar:

1º. X^1 é *solução* $\Rightarrow$ AX^1=b ?

2º. X^1 é *solução admissível* $\Rightarrow$ $X^1 \geq 0$ $\Rightarrow$ todas as componentes de X^1 são não negativas ?

3º. X^1 é *solução básica admissível* $\Rightarrow$ *os vectores da base que correspondem a X^1 são linearmente independentes?*

1º. X^1 é ***solução*** do problema de PL?

Prova:

De **(4.3)** tem-se:

$P_o = x_1 P_1 + x_2 P_2 ... + x_m P_m \; + \theta \; P_{m+1} \Rightarrow X'$ é solução

♦

2º. X^1 é ***solução admissível*** do problema de PL?

Se todas as *componentes* de X^1 são *não negativas*, então X^1 é ***solução admissível,*** *i.e.*,

se $x_{im+1} \geq 0, \; \forall i: i \in \{1 \ldots m\} \Rightarrow$ X^1 é ***solução admissível.***

É preciso de*terminar o valor de* θ *que garante a admissibilidade de* $\mathbf{X}^1$.

<u>Determinar θ:</u>

$\boxed{\theta > 0}$

♦ Suponha-se ao contrário:

I) $\theta = 0$ $\Rightarrow X^1 = X^0$

$\Rightarrow$ *a solução obtida seria a mesma*

$\Rightarrow$ *absurdo!!!* ($X^1 \neq X^0$)

II) $\theta < 0$ $\Rightarrow x_{m+1} = \theta < 0$

$\Rightarrow$ *uma componente de X^1 negativa*

$\Rightarrow$ *absurdo!!!* (pretende-se que todas as componentes de X^1 sejam não negativas)

I),II) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta > 0}$

♦

1º caso: $\boxed{x_{im+1} \leq 0, \; \forall i: i \in \{1 \ldots m\}}$

$x_{im+1} \leq 0 \Rightarrow (x_{i0} - \theta \, x_{im+1}) > 0, \; \forall i: i \in \{1 \ldots m\}$

$\Rightarrow$ a admissibilidade é garantida para qualquer valor não negativo de θ

⇒ como a componente x_{m+1} na nova solução $\boldsymbol{X'}$ é igual a q (ver 4.3) *incrementando indefinidamente o valor de* q, *consegue-se incrementar também indefinidamente o valor da f.o* ($x_{m+1} \to \infty$, $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{c_{m+1} x_{m+1}} \to \infty$)

⇒ ***óptimo não finito***.

2º caso: $\boxed{\exists i: i \in \{1\ldots m\} \mid x_{im+1} > 0}$

Suponha-se $S = \{\, i: i \in \{1...m\} \mid x_{im+1} > 0 \,\}$

então: $(x_{i0} - q x_{im+1}) \geq 0, \forall i \in S \quad \Rightarrow \quad q \leq \dfrac{x_{i0}}{x_{im+1}}, \forall i \in S$

I) ***X*[1] *é admissível*** $\theta > 0$ se $\forall q: 0 < q \leq \dfrac{x_{i0}}{x_{im+1}}, \forall i \in S$

II) X[1] ***pretende ser*** **SBA** ⇒ não pode ter mais de ***m*** componentes positivas (i.e. só m variáveis básicas)

$$\Rightarrow \quad \boxed{q = q_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \middle| x_{im+1} > 0 \right\}}$$

critério que determina qual é a **variável básica que sai** ***(a variável onde se atinge o mínimo dos quocientes).***

Existem duas possibilidades :

I. ***O mínimo é atingido num só quociente.***

Suponha-se que o mínimo é atingido na componente ***s,*** i.e.:

$$q = q_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{im+1}} \middle| x_{im+1} > 0 \right\} = \frac{x_{s0}}{x_{sm+1}}$$

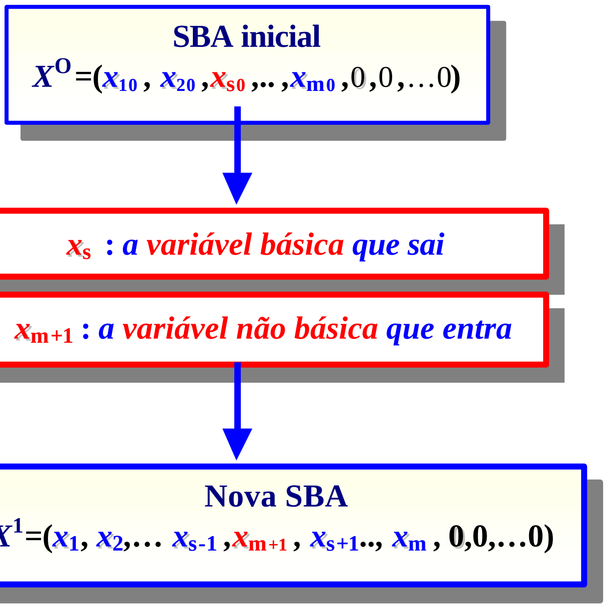
Substituindo q *por* q_0 *na nova solução básica obtém-se:*

$$X_B^1 = \left[(x_{10} - q x_{1m+1}), (x_{20} - q x_{2m+1}), \ldots, (x_{m0} - q x_{mm+1}), q \right]^t$$

A componente *s* onde é atingido o mínimo fica anulada
(a variável básica que sai)

$$X_B^1 = \left[(x_{10} - q_0 x_{1m+1}), \ldots, (x_{s-10} - q_0 x_{s-1m+1}), 0, (x_{s+10} - q_0 x_{s+1m+1}), \ldots, (x_{m0} - q_0 x_{mm+1}), q_0 \right]^t$$

A componente *m+1* toma o valor do mínimo
(a variável não básica que entra)



II. ***O mínimo é atingido em mais do que um dos quocientes***.

Neste caso obtém-se uma ***solução degenerada*** (o número de variáveis básicas da solução é menor do que m), podendo escolher a variável a sair da base, através, por exemplo, dum mecanismo aleatório. Esta questão será abordada no seguinte capítulo.

3º. X^1 é ***solução básica admissível* (SBA)** do problema de PL?

Se X^1 é uma SBA $\Rightarrow$ os vectores $\{P_1, P_2, \ldots, P_{s-1}, \mathbf{P_{m+1}}, P_{s+1}, \ldots, P_m\}$ são linearmente independentes.

Prova:

Sem perda de generalidade, suponha-se que s=1, ou seja, que o mínimo do quociente foi atingido na componente i=1,i.e:

$$q_0 = \frac{x_{10}}{x_{1m+1}}, \quad x_{1m+1} > 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Suponha-se ao contrário que os vectores $\{P_2, P_3, \ldots, P_m, \boldsymbol{P_{m+1}}\}$são linearmente dependentes (l.d).

$$\{P_2, P_3, \ldots, P_m, P_{m+1}\} \text{ são l.d.}$$

$$\Rightarrow \quad l_2 P_2 + l_3 P_3 + \ldots + l_m P_m + l_{m+1} P_{m+1} = 0, \quad l_2, l_2, \ldots, l_{m+1} \quad \text{não todos nulos}$$

como

$$\{P_2, P_3, \ldots, P_m\} \subset \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m\}$$ - vectores l.i. (base correspondente à solução X^0)

$$\Rightarrow \{P_2, P_3, \ldots, P_m\} \text{ são l.i.}$$

$$\Rightarrow l_{m+1} \neq 0.$$

$$\Rightarrow P_{m+1} = -\frac{l_2}{l_{m+1}} P_2 - \frac{l_3}{l_{m+1}} P_3 - \ldots - \frac{l_m}{l_{m+1}} P_m$$

tomando:

$$a_2 = -\frac{l_2}{l_{m+1}} P_2, a_3 = \frac{l_3}{l_{m+1}} P_3, \ldots, a_m = \frac{l_m}{l_{m+1}} P_m$$

P_{m+1} como combinação linear dos vectores básicos correspondente à solução $\boldsymbol{X}^o$

$$\begin{array}{r} P_{m+1} = x_{1m+1} P_1 + x_{2m+1} P_2 \ldots + x_{mm+1} P_m \\ - \quad P_{m+1} = a_2 P_2 + a_3 P_3 + \ldots + a_m P_m \\ \hline 0 = x_{1m+1} P_1 + (x_{2m+1} - a_2) P_2 \ldots + (x_{mm+1} - a_m) P_m \end{array}$$

$$\Rightarrow \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m\} \text{ são l.i.}$$

$$\Rightarrow x_{1m+1} = 0, (x_{2m+1} - a_2) = 0, \ldots, (x_{mm+1} - a_m) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1m+1} = 0$$

absurdo (ver 4.4.) !!! (por hipóteses, na componente *s=1 foi atingido o mínimo dos quocientes, i.e.* $x_{m+1} = q_0 > 0$

$$\Rightarrow \{P_2, P_3, \ldots, P_m, P_{m+1}\} \text{ são l.i}$$ ♦

Conclusões:

✓ A mudança de base resultante da substituição de um vector corresponde, do ponto de vista geométrico, à passagem de um ponto extremo a outro ponto extremo adjacente de K e, do ponto de vista algébrico, à passagem de uma SBA a outra SBA.

- ✓ A mudança de base só é possível no caso de existir um vector $\boldsymbol{P_j}$ fora da base candidato a entrar na base (c_j - z_j >0), com pelo menos uma componente x_{ij}>0 na coluna do quadro simplex correspondente
- ✓ Em caso contrario, se $\forall$ $\boldsymbol{P_j}$ fora da base candidato a entrar na base (c_j- z_j >0) $\forall$ componente x_{ij} verifica que $x_{ij} \leq 0$ (todas as componentes na coluna do quadro simplex correspondente são não positivas) então é impossível obter algum θ >0 que elimine algum vector da base, o valor óptimo da f.o. pode crescer indefinidamente, i.e., o problema ***não tem óptimo finito***.

4.2.2. Mudança do ponto extremo com melhoria da f.o.

Na secção anterior ficou em aberto a questão da escolha do vector P_j a entrar na base (foi escolhido sem nenhum critério qualquer vector, especificamente P_{m+1}).

Como determinar qual o vector que deve entrar na base, i.e., qual é o critério de entrada?

Suponha-se $\boldsymbol{X^0}$ uma SBA associada à base $\mathbf{B^0}$ e a que corresponde um valor da f.o. $\boldsymbol{z^0}$

$$X_{\mathrm{B}}^{0} = [x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0}] \quad , \mathrm{B}^0 = [P_1, P_2, \ldots, P_m] \, , \quad z^o = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + ... + c_m x_{mo}$$

Suponha-se $\boldsymbol{P_r}$ um vector fora da base em condições de substituir um vector da base

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{P_r}$ tem pelo menos uma componente x_{ir}>0 na coluna correspondente no quadro simplex.

$\Rightarrow$ a entrada de $\boldsymbol{P_r}$ na base tem como contrapartida a saída dum vector $\boldsymbol{P_s}$ (na componente $\boldsymbol{s}$ é atingido o mínimo $\boldsymbol{q_o}$ dos quocientes);

$\Rightarrow$ com a mudança da base, obtém-se uma nova SBA $\boldsymbol{X^1}$ associada à base $\mathbf{B^1}$ e a que corresponde um valor da f.o. $\boldsymbol{z^1}$.

$$\boxed{X_{\mathrm{B}}^{1} = [x_1, ..., x_{s-1}, x_r, x_{s+1}, ..., x_m]} \qquad \boxed{B^1 = [P_1, ..., P_{s-1}, P_r, P_{s+1}, ..., P_m]}$$

$\boldsymbol{x_s=0}$: a variável básica $\boldsymbol{x_s}$ que sai

$$X_{\mathrm{B}}^{1} = [(x_{10} - q_0 x_{1r}), ..., (x_{s-10} - q_0 x_{s-1r}), (x_{s0} - q_0 x_{sr}), (x_{s+10} - q_0 x_{s+1r}), ..., (x_{m0} - q_0 x_{ms}), ..., q_0]$$

$x_r = \theta_0$: a variável básica x_r que entra

$$z^1 = c_1(x_{10} - \theta_0 x_{1r}) + \ldots + c_r\theta_0 + \ldots + c_m(x_{m0} - \theta_0 x_{mr}) =$$
$$= (c_1 x_{10} + \ldots + c_m x_{m0}) + \theta_0\left[c_r - (c_1 x_{1r} + \ldots + c_m x_{mr})\right] =$$
$$= z^0 + \theta_0(c_r - z_r)$$
$$\text{onde} \quad z_r = (c_1 x_{1r} + \ldots + c_m x_{mr}) . = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ir}$$

$$\Rightarrow \boxed{z^1 = z^0 + \theta_0(c_r - z_r)}$$

Expressão que relaciona o novo valor da f.o. (associado à nova SBA) com o seu valor anterior e com o valor que vai assumir a nova variável básica $x_r = \theta_0$

Partindo do principio que escolhendo o vector que conduza a um maior crescimento da f.o, o número de iterações, pode vir reduzido.

Concluindo, o vector $\boldsymbol{P_r}$ é escolhido de acordo com o critério:

$$\boxed{\max_j \left\{(c_j - z_j) : c_j - z_j > 0\right\} = c_r - z_r}$$

Critério de saída

A análise de $\boldsymbol{c_j - z_j}$ recai apenas sobre os vectores P_j fora da base:

$$\boxed{c_j - z_j = 0, \forall j \in \{1 \ldots m\}}$$

Partindo da nova SBA, o processo prossegue até se verificar uma das duas situações seguintes:

1º. *todos os* $\boldsymbol{c_j - z_j \leq 0}$ $\Rightarrow$ impossível melhorar o valor da f.o $\Rightarrow$ a solução corrente é óptima.

2º. *Existe algum* $\boldsymbol{c_j - z_j > 0}$ *associado a um vector* P_j *fora da base que não pode substituir nenhum vector* $\boldsymbol{P_s}$ *da base* ($x_{ij} \leq 0\ \forall i$) $\Rightarrow$ óptimo não finito.

4.2.3. Critério de optimalidade.

Suponha-se uma SBA do problema de PL X^0 para a qual A=[B^0 , N^0], tal que:

$$\boxed{X_B^0 = [x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}]}\ , \ \boxed{B^0 = [P_1, P_2, \ldots, P_m]} \quad \boxed{N^0 = [P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots, P_{m+n}]}$$

e com o correspondente valor da função objectivo z^o:

$$\boxed{z^o = c_1 x_{10} + c_2 x_{20} + \ldots + c_m x_{mo}}$$

Teorema 4.1: *(mudança de solução óptima com melhoria da f.o)*

- Se $\boldsymbol{X^0}$ é não degenerada (x_{io}>0 $\forall i$ ={1,…m});
- Se $\exists \ j \in \{m+1, \ldots, m+n\} : c_j - z_j > 0$;
- Se para o correspondente vector P_j $\exists \ i$: x_{ij}>0

  (x_{ij} - as componentes do quadro que correspondem à coluna $B^{-1}P_j$)

então existe ***uma nova* SBA** $\boldsymbol{X^1}$ com ***valor finito*** da f.o $\boldsymbol{z^1}$ tal que $\boldsymbol{z^1 > z^0}$

Teorema 4.2: *(critério de óptimo finito)*

- Se $c_j - z_j \le 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$

  $\Rightarrow$ ***X^0 é óptima.***
- Se ***X^0 é óptima*** e ***X^0 é não degenerada*** (x_{io}>0 $\forall i$ =1,…m)

  $\Rightarrow c_j - z_j \le 0 \quad \forall j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$

Teorema 4.3: *(critério de óptimo não finito)*

- Se $\exists \ j \in \{m+1, \ldots, m+n\} : c_j - z_j > 0$
- Se para o correspondente vector *Pj:* $\forall \ i : x_{ij} \le 0$

  (x_{ij} - as componentes do quadro que correspondem à coluna $B^{-1}P_j$)

então o problema ***não tem óptimo finito***