Matemáticas Gerais I - 2004/05

Ficha de trabalho 5 - Proposta de resolução

Esta é apenas uma **proposta** de resolução, podendo haver outras correctas.

1.

1.1 $5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$

1.2 $7^3 = 343 \Leftrightarrow \log_7 343 = 3$

1.3 $8^4 = 4096 \Leftrightarrow \log_8 4096 = 4$

1.4 $4^6 = 4096 \Leftrightarrow \log_4 4096 = 6$

1.5 $5^{-2} = 0.04 \Leftrightarrow \log_5 0.04 = -2$

1.6 $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

1.7 $0.5^{-3} = 8 \Leftrightarrow \log_{0.5} 8 = -3$

1.8 $0.1^{-4} = 10000 \Leftrightarrow \log_{0.1} 10000 = -4$

2.

2.1 $\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$

2.2 $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$

2.3 $\log_3 729 = 6 \Leftrightarrow 3^6 = 729$

2.4 $\log_5 3125 = 5 \Leftrightarrow 5^5 = 3125$

2.5 $\ln 5 \cong 1.6094 \Leftrightarrow e^{1.6094} \cong 5$

2.6 $\log_2 0.25 = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = 0.25$

2.7 $\log_{10} 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

2.8 $\log_{0.25} 16 = -2 \Leftrightarrow (0.25)^{-2} = 16$

3.

3.1 $\log_2 16 = 4$ é verdadeiro pois $2^4 = 16$

3.2 $\log_5 125 = 25$ é falso porque $5^{25} \neq 125$

3.3 $\log_{0.1} 100 = 2$ é falso porque $(0.1)^2 = 0.01 \neq 125$

3.4 $\log_3 81 = \log_2 16$ é verdadeiro pois $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$ e $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

3.5 $\log_5 25 = \log_2 4$ é verdadeiro pois $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$ e $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

4.

4.1 $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$

4.2 $10e^{5x} = 25 \Leftrightarrow e^{5x} = 2.5 \Leftrightarrow 5x = \ln 2.5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}\ln 2.5$

4.3 $3\ln(2x) - 4 = 2\ln(2x) \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ 2x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$3\ln(2x) - 4 = 2\ln(2x) \Leftrightarrow 3\ln(2x) - 2\ln(2x) = 4 \Leftrightarrow \ln(2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^4$$

4.4 $x^2 \ln x - 4\ln x = 0 \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^+$

$$x^2 \ln x - 4\ln x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)\ln x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \ \vee \ \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ \underbrace{x = -2}_{imp.} \vee \ x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 2$$

4.5 $\ln(x^2 + 3) - \ln x^2 = 1 \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3 > 0 \ \wedge \ x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\ln(x^2 + 3) - \ln x^2 = 1 \Leftrightarrow \ln \frac{x^2 + 3}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x^2 = e \Leftrightarrow x^2 + 3 = ex^2$$

$$\Leftrightarrow (e - 1)x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{e - 1} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{e - 1}}$$

4.6 $x\ln x - \ln x = 0 \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^+$

$$x\ln x - \ln x = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \ \vee \ \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

4.7 $2\ln x^4 - \ln x^2 = 12 \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$2\ln x^4 - \ln x^2 = 12 \Leftrightarrow \ln (x^4)^2 - \ln x^2 = 12 \Leftrightarrow \ln \frac{x^8}{x^2} = 12 \Leftrightarrow \ln x^6 = 12$$

$$\Leftrightarrow x^6 = e^{12} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[6]{e^{12}} \Leftrightarrow x = \pm e^2$$

4.8

$$e^x - e^{-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; e^x - \frac{1}{e^x} = 1 \;\Leftrightarrow\; (e^x)^2 - 1 = e^x \;\wedge\; e^x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \;\Leftrightarrow\; e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\vee\; \underbrace{e^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{imp.}$$

$$\Leftrightarrow\; x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

5.

5.1 $f(x) = \pi^{x^3}$

$f(0) = \pi^0 = 1$

$f(1) = \pi^{1^3} = \pi$

$f(x)f(y) = \pi^{x^3} \cdot \pi^{y^3} = \pi^{x^3+y^3}$

$f(x+y) = \pi^{(x+y)^3} \neq \pi^{x^3+y^3}$

Logo f não é exponencial.

5.2 $f(x) = \sqrt[x]{0.2}$ $\qquad \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{N} :\; x \geq 2\}$

f não é exponencial pois $0 \notin \mathcal{D}_f$.

5.3 $f(t) = 3^{t^2-2t+1}$

$f(0) = 3 \neq 1,$ $\qquad$ logo f não é exponencial.

5.4 $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$f(0) = 0 \neq 1,$ $\qquad$ logo f não é exponencial.

5.5 $f(x) = \frac{1}{e^{3x+1}}$

$f(0) = \dfrac{1}{e} \neq 1,$ $\qquad$ logo f não é exponencial.

5.6 $f(x) = \sqrt{3}x^6$

$f(0) = 0 \neq 1,$ $\qquad$ logo f não é exponencial.

5.7 $f(x) = 0.5^{x-4}$

$f(0) = 0.5^{-4} \neq 1,$ $\qquad$ logo f não é exponencial.

5.8 $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$

$f(0) = 10^0 = 1$

$f(1) = 10$

$f(x)f(y) = 10^{\sqrt{x}} \cdot 10^{\sqrt{y}} = 10^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$f(x+y) = 10^{\sqrt{x+y}} \neq 10^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Logo f não é exponencial.

5.9 $f(x) = 3^{2x}$

$f(0) = 3^0 = 1$

$f(1) = 3^2 = 9$

$f(x)f(y) = 3^{2x} \cdot 3^{2y} = 3^{2x+2y} = 3^{2(x+y)}$

$f(x+y) = 3^{2(x+y)}$

Logo f é função exponencial de base 9. Note-se que $f(x) = 3^{2x} = 9^x$.

6.

6.1

$$e^{x^3-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 1 \;\vee\; x = -1$$

$\{-1, 0, 1\} \not\subset \{0\}$, logo a proposição é falsa.

6.2 $\ln\left(\dfrac{x}{x^3+1}\right) = \ln x - \ln(x^3+1)$ é uma proposição falsa pois as funções

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^3+1}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \ln x - \ln(x^3+1)$$

têm domínios diferentes. Por exemplo, $-2 \in \mathcal{D}_f$ mas $-2 \notin \mathcal{D}_g$.

6.3 $\ln(x+1)^2 = 0 \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\ln(x+1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x+1 = 1 \;\vee\; x+1 = -1 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -2$

$\{-2, 0\} \not\subset \{0\}$, logo a proposição é falsa.

6.4 $\quad 2x\ln(x+1) = 4x[\ln(x+1)]^2 \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}: \ x+1>0\} =]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} 2x\ln(x+1) = 4x[\ln(x+1)]^2 &\Leftrightarrow 2x\ln(x+1)\Big(1-2\ln(x+1)\Big) = 0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ \ln(x+1)=0 \ \vee \ 1-2\ln(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x+1=1 \ \vee \ \ln(x+1)=\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=0 \ \vee \ x+1=e^{\frac{1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=e^{\frac{1}{2}}-1 \end{aligned}$$

$\{0, e^{\frac{1}{2}}-1\} \not\subset \{0\}$, logo a proposição é falsa.

7.

7.1 $\quad e^{x^2-2x+1} > 0 \qquad$ Condição universal em $\mathbb{R}$. $\quad C.S. = \mathbb{R}$

7.2 $\quad \log_3|2x+1| = 1 \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}: \ |2x+1|>0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$\begin{aligned} \log_3|2x+1| = 1 &\Leftrightarrow |2x+1| = 3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \ \vee \ 2x+1=-3 \\ &\Leftrightarrow x=1 \ \vee \ x=-2 \end{aligned}$$

$C.S. = \{-2, 1\}$

7.3 $\quad \log_2(x+1) > 0 \qquad \mathcal{D} =]-1,+\infty[$

$$\log_2(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow x>0$$

$C.S. = \mathbb{R}^+$

7.4

$$4^x = 2^{3x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{3x-1} \Leftrightarrow 2x = 3x-1 \Leftrightarrow x=1$$

$C.S. = \{1\}$

7.5 $\quad \ln x < \ln(2x) \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R}^+$

$$\ln x < \ln(2x) \Leftrightarrow x < 2x \Leftrightarrow x > 0$$

$C.S. = \mathbb{R}^+$

7.6 $\quad 2\ln(x+1) = 0 \qquad \mathcal{D} =]-1,+\infty[$

$$2\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$$

$C.S. = \{0\}$

7.7 $\ln(x+1)^2 = 0 \qquad \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ (x+1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} \ln(x+1)^2 = 0 \ &\Leftrightarrow \ (x+1)^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ x+1 = 1 \ \vee \ x+1 = -1 \\ &\Leftrightarrow \ x = 0 \ \vee \ x = -2 \end{aligned}$$

$C.S. = \{-2, 0\}$

8. $f(t) = 2e^{kt} + 20$

$$\begin{aligned} f(2) = 30 \ &\Leftrightarrow \ 2e^{kt} + 20 = 30 \ \Leftrightarrow \ 2e^{kt} = 10 \ \Leftrightarrow \ e^{kt} = 5 \ \Leftrightarrow \ 2k = \ln 5 \\ &\Leftrightarrow \ k = \tfrac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

$$f(3) = 2e^{3k} + 20 = 2e^{\frac{3}{2}\ln 5} + 20 = 2e^{\ln 5^{\frac{3}{2}}} + 20 = 2 \times 5^{\frac{3}{2}} + 20$$

9. $g(x) = e^{3x-1}$

9.1

$$g(x) = 2 \ \Leftrightarrow \ e^{3x-1} = 2 \ \Leftrightarrow \ 3x - 1 = \ln 2 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\ln 2 + 1}{3}$$

9.2 A função g é a composta de funções estritamente crescentes, logo é estritamente crescente, pelo que é injectiva e consequentemente invertível.

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} = \mathcal{CD}_{g^{-1}} \qquad \mathcal{CD}_g = \mathbb{R}^+ = \mathcal{D}_{g^{-1}}$$

$$y = e^{3x-1} \ \Leftrightarrow \ 3x - 1 = \ln y \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\ln y + 1}{3}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \ \mathbb{R}^+ \ &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x \ &\longmapsto \ \frac{\ln x + 1}{3} \end{aligned}$$

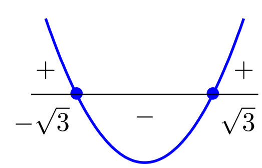
10. $f(x) = \dfrac{[\ln(x^2 - 3)]^2}{x^2 - 4}$

10.1 $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3 > 0 \ \wedge \ x^2 - 4 \neq 0\} = \Big( ]-\infty, -\sqrt{3}[\ \cup \ ]\sqrt{3}, +\infty[\Big) \setminus \{-2, 2\}$

c.aux.

$x^2 - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -\sqrt{3} \ \vee \ x = \sqrt{3}$

$x^2 - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2 \ \vee \ x = -2$



10.2

$$\begin{aligned} f(x)=0 \;&\Leftrightarrow\; [\ln(x^2-3)]^2=0 \;\wedge\; x\in\mathcal{D}_f \;\Leftrightarrow\; \ln(x^2-3)=0 \;\wedge\; x\in\mathcal{D}_f \\ &\Leftrightarrow\; x^2-3=1 \;\wedge\; x\in\mathcal{D}_f \;\Leftrightarrow\; x=\pm 2 \;\wedge\; x\in\mathcal{D}_f \quad \textit{imp.} \end{aligned}$$

A função f não se anula.

10.3 f é uma função par pois $f(-x)=f(x),\ \forall\, x\in\mathcal{D}_f$, consequentemente não é injectiva e portanto não é invertível.

11.

11.1 $f(x)=\ln x^2$ se $x>0$ $\quad\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^+\quad \mathcal{CD}_f=\mathbb{R}$

f é injectiva logo é invertível.

$$y=\ln x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2=e^y \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x=-\sqrt{e^y}}_{\text{imp. pois } \mathcal{CD}_{f^{-1}}=\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^+} \vee\; x=\sqrt{e^y} \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt{e^y}$$

Outro processo para explicitar x: Em $\mathbb{R}$

$$y=\ln x^2 \;\Leftrightarrow\; y=2\ln|x|,$$

mas em $\mathbb{R}^+$ temos que $|x|=x$ pelo que resulta

$$y=2\ln x \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{2}=\ln x \;\Leftrightarrow\; x=e^{\frac{y}{2}}.$$

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}} \end{array}$$

$g(x)=\ln x^2$ se $x<0$ $\quad\mathcal{D}_g=\mathbb{R}^-\quad \mathcal{CD}_g=\mathbb{R}$

g é injectiva logo é invertível.

$$y=\ln x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2=e^y \;\Leftrightarrow\; x=-\sqrt{e^y} \;\vee\; \underbrace{x=\sqrt{e^y}}_{\text{imp. pois } \mathcal{CD}_{g^{-1}}=\mathcal{D}_g=\mathbb{R}^-} \;\Leftrightarrow\; x=-\sqrt{e^y}$$

Outro processo: Em $\mathbb{R}^-$, visto que $|x|=-x$ temos

$$y=\ln x^2 \;\Leftrightarrow\; y=2\ln(-x) \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{2}=\ln(-x) \;\Leftrightarrow\; -x=e^{\frac{y}{2}} \;\Leftrightarrow\; x=-e^{\frac{y}{2}}.$$

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^- \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{e^x}=-e^{\frac{x}{2}} \end{array}$$

11.2

11.2.1 $f(x) = \ln x^2 = 2\ln x,\ $ pois $x > 0$. Verdadeira

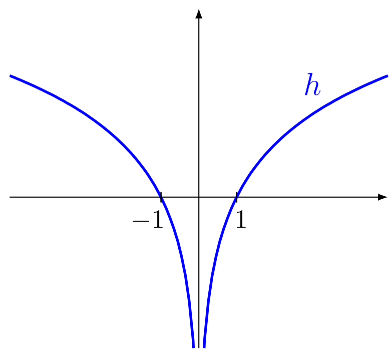
11.2.2 $f(x) = 2\ln|x|$. Falsa porque $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$ e $\mathcal{D}_{2\ln|x|} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

11.2.3 $g(x) = 2lnx$. Falsa porque $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^-$ e $\mathcal{D}_{2\ln x} = \mathbb{R}^+$

11.2.4 $g(x) = \ln x^2 = 2\ln(-x),\ $ pois $x < 0$. Verdadeira

11.2.5 $h(x) = 2\ln x$. Falsa porque $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{D}_{2\ln x} = \mathbb{R}^+$

11.3



12 $g(x) = |\ln|x+1||$

12.1

$$\lim_{x\to -1} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

12.2 $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} g(x) = 1 \ &\Leftrightarrow\ |\ln|x+1|| = 1 \Leftrightarrow \ln|x+1| = 1 \ \vee\ \ln|x+1| = -1 \\ &\Leftrightarrow\ |x+1| = e \ \vee\ |x+1| = e^{-1} \\ &\Leftrightarrow\ x+1 = e \ \vee\ x+1 = -e \ \vee\ x+1 = e^{-1} \ \vee\ x+1 = -e^{-1} \\ &\Leftrightarrow\ x = e-1 \ \vee\ x = -e-1 \ \vee\ x = e^{-1}-1 \ \vee\ x = -e^{-1}-1 \end{aligned}$$

13

13.1 $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{2x-1} = +\infty$

13.2 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$

13.3 $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+2} = 0$

13.4 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x-2)+2) = +\infty$

13.5 $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = \ln 1 = 0$

13.6 $\lim_{x\to 0} \ln(2x) = -\infty$

13.7 $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}} = e^0 = 1$

13.8 $\lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{x^2+1}} = e^0 = 1$

13.9 $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{x^2+1}} = e^0 = 1$

13.10 $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$

13.11 $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\infty$

13.12 $\lim_{x\to 0} \ln(x^2+1) = \ln 1 = 0$

14.

$$y(1) = -2 \quad \text{e} \quad \ln|y+1| = x^3 - 1 + c$$

Atendendo a que y é contínua e que $y(1) = -2$ vamos substituir na 2ª expressão x por 1 e y por -2.

$$\ln|-2+1| = 1^3 - 1 + c \;\Leftrightarrow\; \ln|-1| = c \;\Leftrightarrow\; c = 0$$

Como $c = 0$, temos então,

$$\begin{aligned} \ln|y+1| = x^3 - 1 \;&\Leftrightarrow\; |y+1| = e^{x^3-1} \;\Leftrightarrow\; y+1 = e^{x^3-1} \;\Leftrightarrow\; y+1 = -e^{x^3-1} \\ &\Leftrightarrow\; \underbrace{y = -1 + e^{x^3-1}}_{\text{imp. pois } y(1)=-2} \vee\; y = -1 - e^{x^3-1} \\ &\Leftrightarrow\; y = -1 - e^{x^3-1} \end{aligned}$$

15.

15.1 $\lim_{x\to+\infty} xe^{2x-1} = +\infty$

15.2 $\lim_{x\to 0} x^{-2}e^x = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

15.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ Este limite conduz a uma indeterminação do tipo $(\infty \times 0)$

$$xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{-x}{e^{-x}},$$

quando $x \to -\infty$, $-x \to +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty.$

Logo

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = -\lim_{-x\to+\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$$

15.4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$

15.5 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x-1}{x}+1\right) = 1+1 = 2$

15.6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} = 2\times 1 = 2$

15.7

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{+\infty} \times \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}_{1} = +\infty$$