Matemáticas Gerais II

Soluções da Folha Prática 3 **2005/2006**

1. (a) Sim; (b) $C^4 = \begin{bmatrix} 61 & -30 \\ 90 & -44 \end{bmatrix}$.

2. (a) $B = E_{32}(1)\, E_{13}(2)\, E_2\left(\frac{1}{2}\right) P_{13}$; (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

3. A, C, D são invertíveis, B não é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

4. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5. (a) $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -abc & -c & 1 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\mathrm{car}A = 2 \Leftrightarrow \lambda = 0$ e $\mu = -1$; $\mathrm{car}A = 3 \Leftrightarrow (\lambda = 0$ e $\mu \neq -1)$ ou $(\lambda \neq 0$ e $\mu = -1)$;
   $\mathrm{car}A = 4 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ e $\mu \neq -1$; (b) $\lambda \neq 0$ e $\mu \neq -1$.

8. (a) Troca-se a coluna i pela coluna j;
   (b) Multiplica-se a coluna i por $1/\alpha$;
   (c) Adiciona-se à coluna i a coluna j multiplicada por $-\alpha$.

9. Sejam A, B ortogonais. Como A, B são invertíveis, $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$, tem-se que
   (a) A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, logo A^{-1} é ortogonal;
   (b) AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T$, logo AB é ortogonal;

10. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $S = \{(1, 0, -1)\}$.

11. (a) $X = B^TA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $X = A^T\left(B - C^{-1}A^{-1}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & -4 \end{bmatrix}$;
    (c) $X = \left(F(ED)^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.