Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Matemáticas Gerais II

Soluções da Folha Prática 4 **2005/2006**

---

1. (a) -3; (b) 12; (c) -30.

2. Observe que cA é a matriz que que se obtém de A efectuando $L'_k = cL_k$, $k = 1, \ldots, n$.

3. (a) 3; (b) -15; (c) 27; (d) $-\frac{1}{5}$; (e) 96; (f) $\frac{32}{3}$; (g) $\frac{1}{96}$; (h) $-\frac{9}{5}$.

4. 36.

5. Sugestões de resolução:

   (a) Efectue $C_2 \leftrightarrow C_3$ e obtenha uma matriz triangular inferior;

   (b)[1] Efectue $C'_1 = C_1 - C_2 + C_3$ e obtenha $2\begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a' & b'+c' & c'+a' \\ a'' & b''+c'' & c''+a'' \end{vmatrix}$, depois $C'_3 = C_3 - C_1$ e finalmente $C'_2 = C_2 - C_3$.

   (c) Após efectuar $L'_1 = L_1 - aL_2$, obtenha $a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$ e observe que $L_1 = L_3$.

   (d) Efectue $C'_1 = C_1 + C_2 + C_3$, depois $L'_2 = L_2 - L_1$ e $L'_3 = L_3 - L_1$ e obtenha uma matriz triangular superior;

   (e) Efectue $L'_k = L_k - L_1$, $k = 1, 2, 3$ e obtenha uma matriz triangular superior;

   (f) Efectue $C'_1 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, depois $L'_3 = L_3 - L_2$, $L'_4 = L_4 - L_3 - L_2 + L_1$, a seguir $C'_2 = C_2 - C_3$, seguidamente $L'_1 = L_1 - L_2$, finalmente $L_1 \leftrightarrow L_2$ e $L_3 \leftrightarrow L_4$, obtendo

$$(a+b+2\lambda)(a+b-2\lambda)(a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda & b \\ 0 & 1 & b-\lambda & \lambda-b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. (a) 1; (b) -19; (c) -11; (d) 8; (e) 0; (f) $a^4 - b^4$.

7. (a) 4; (b) $-2, 0, 2$; (c) $1, \frac{4}{3}$.

---

[1] Na Folha Prática 4 disponibilizda na Secção de Textos, existe uma gralha no segundo determinante deste exercício: a entrada da segunda linha e primeira coluna deve ser a' (e não a).

8. (a) $\det A = 0$, $\det B = 4$; (b) $\operatorname{car} A < 3$, $\operatorname{car} B = 3$.

9. $-4, -1, 0$.

10. $2, -6$.

11. Falsas: (a)(c)(f), Verdadeiras: (b)(d)(e)(g)(h).

12. (a) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A(\operatorname{adj} A) = 2\, I_3$ e $\det A = 2$; (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

13. (a) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $Z = 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

14. (a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} \frac{7}{34} & -\frac{5}{34} & -\frac{13}{34} \\ \frac{2}{17} & \frac{1}{17} & \frac{6}{17} \\ \frac{3}{34} & -\frac{7}{34} & \frac{9}{34} \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$, se $abcd \neq 0$.

15. Elemento da segunda linha e terceira coluna da adjunta é $A_{32} = 2$ e da inversa é 1.

16. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\{(1 - \frac{7}{2}z, 1 - 12z, 1 + \frac{25}{2}z : z \in \mathbb{R}\}$. $\left(\text{Observe que } \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 - 3z \\ 4 + z \\ 4 + 2z \end{bmatrix}. \right)$

17. Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $\det A \neq 0$, então A é invertível e $\operatorname{adj} A = (\det A)A^{-1}$, logo

$$\det(\operatorname{adj} A) = \det\big((\det A)A^{-1}\big) = (\det A)^n \det(A^{-1}) = \frac{(\det A)^n}{\det A} = (\det A)^{n-1} = \det(A^{n-1}).$$

18. $A = (\det A)(\operatorname{adj} A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

19. (a) $\{(-2, 1, -3)\}$; (b) $\{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2)\}$; (c) $\{(0, -1, -8)\}$.

20. 1.

21. (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; (b) $\{(0, 1, -1)\}$.

22. (a) – (b) i. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$; ii. $\{(w, w, w, w) : w \in \mathbb{R}\}$.