Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Matemáticas Gerais II

Soluções da Folha Prática 5 **2005/2006**

---

1. $v = -4v_1 + 3v_2 + v_3$.

2. Verificar que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

3. (a) i. Sim; ii. Não; iii. Sim; (b) i. 2; ii. 1 ou 2; iii. 4.

4. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{3}\}$.

5. (a) Verificar que $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = 2v_2$ e $Av_3 = -v_3$;

   (b) A é diagonalizável, pois A possui três valores próprios distintos, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (c) $A^3 = P \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 P^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 28 \\ -14 & 13 & 28 \\ -\frac{19}{2} & \frac{19}{2} & 27 \end{bmatrix}$.

6. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$; (b) $\sigma(A) = \{2, -1\}$;

   (c) Como A possui dois valores próprios distintos, A é diagonalizável e, portanto, A é semelhante a uma matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal são $2, -1$.

$$A^5 = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^5 P^{-1} = \begin{bmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{bmatrix}, \qquad \text{onde} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

8. $\sigma(A) = \{3\}$ com 3 de multiplicidade algébrica um, [Observe que $p_A(\pm i) = 0$, mas $\pm i \notin \mathbb{R}$.]

$$V_3(A) = \left\{ y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\};$$

   $\sigma(B) = \{3, 1\}$ com 1 de multiplicidade algébrica dois,

$$V_3(B) = \left\{ z \begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}, \qquad V_1(B) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\};$$

$\sigma(C)=\{3,1\}$ com 1 e 3 ambos de multiplicidade algébrica dois,

$$V_3(C)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\},\ V_1(C)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}: (x,w)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\};$$

Nenhuma das matrizes é diagonalizável.

9. (a) A é diagonalizável, pois possui três vectores próprios linearmente independentes, embora $\sigma(A)=\{2,0\}$ com 0 de multiplicidade algébrica dois, e

$$P=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonalizante.

(b) $D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ e $A^{10}=PD^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\512&1024&0\\-512&-1024&0\end{bmatrix}$.

10. (a) $\sigma(A)=\sigma(B)=\{4,2\}$ com 2 de multiplicidade algébrica dois,

$$V_4(A)=\left\{z\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}: z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\},\quad V_2(A)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}: (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\},$$

$$V_4(B)=\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}: x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\},\quad V_2(B)=\left\{y\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}: y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\};$$

(b) A é diagonalizável, pois possui três vectores próprios linearmente independentes, sendo

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

uma matriz diagonalizante. B não é diagonalizável.

11. $0,2$. [Observe que $0\in\sigma(A)\Leftrightarrow\det A=0$.]

12. 1. [Observe que $A_kv=-2v\Rightarrow(k=1$ ou $k=-1)$; $\sigma(A_1)=\{2+\sqrt{14},2-\sqrt{14},-2\}$ e $\sigma(A_{-1})=\{-2\}$, logo A_{-1} não é diagonalizável.]