

Matemáticas Gerais II

Soluções da Folha Prática 8

2005/2006

1. (a) $[-1, 1] \times]-1, 1[$; (interior do quadrado delimitado pelas rectas $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ e $y = 1$, incluindo os pontos sobre os lados paralelos ao eixo dos yy);
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ (círculo de centro $(0, 0)$ e raio dois, excepto a origem);
 (c) $[-2, 0] \times]-\infty, 0] \cup [0, 2] \times [0, +\infty[$;
 (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio um).

2. (a) $N_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \alpha^2\}$ são circunferências de centro $(0, 0)$ e raio α , se $\alpha > 0$, $N_0 = \{(0, 0)\}$, $N_\alpha = \emptyset$, se $\alpha < 0$, e

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

representa uma superfície cónica circular de eixo segundo o eixo dos zz , com $z > 0$;

- (b) $N_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9 - \alpha^2\}$ são circunferências de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{9 - \alpha^2}$, se $0 < \alpha < 3$, $N_0 = \{(0, 0)\}$, $N_\alpha = \emptyset$, se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 3$, e

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ e } z \geq 0\}$$

representa a superfície da esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio três, acima do plano xoy ;

- (c) $N_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha/4} = 1\}$ são elipses de centro $(0, 0)$, semi-eixos horizontal e vertical de comprimento $\sqrt{\alpha}$ e $\sqrt{\alpha}/2$, se $\alpha > 0$, $N_0 = \{(0, 0)\}$, $N_\alpha = \emptyset$, se $\alpha < 0$, e

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4y^2\}$$

representa a superfície de um parabolóide elíptico;

- (d) $N_1 = \{\frac{\pi}{2}\} \times [0, +\infty[$ é uma semi-recta, $N_\alpha = \{\arcsin \alpha, \pi - \arcsin \alpha\} \times [0, +\infty[$ são duas semi-rectas, se $0 \leq \alpha < 1$, $N_\alpha = \emptyset$, se $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$, e

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin x, 0 \leq x \leq \pi \text{ e } y \geq 0\}.$$

3. (a) $N_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5 - \alpha\}$ são superfícies esféricas de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{5 - \alpha}$, se $\alpha < 5$, $N_5 = \{(0, 0, 0)\}$ e $N_\alpha = \emptyset$, se $\alpha > 5$;
 (b) $N_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = z + \alpha\}$ são superfícies cilíndricas parabólicas de eixos paralelos ao eixo dos yy .

4. i. (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 3x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ (todo o plano excepto a parábola de equação $y = 3x^2$);
 (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (todo o plano excepto a origem);
 (c) $] - \infty, 1] \times] - \infty, 1] \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ (intersecção dos semi-planos abertos definidos pelas equações $x < 1$ e $y < 1$, excepto o eixo dos yy);
 (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \text{ e } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ e } y < 0)\} \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ (dois quadrantes ímpares, incluindo o eixo dos xx e dos yy , excepto a bissetriz destes quadrantes);
 (e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (todo o plano excepto o eixo dos xx);
 (f) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (todo o plano excepto a origem).

ii. nenhum dos limites existe.

5. (a) 0; (b) 0; (c) 0; (d) -1; (e) 0; (f) $\frac{1}{2}$.

6. (a) \mathbb{R}^2 ; (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \cup \{(0, 0)\}$;
 (d) $\{(0, \sqrt{\pi})\} \cup \{(0, -\sqrt{\pi})\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq \pi \text{ e } (x, y) \neq (0, 0)\}$.

7. (a) $f_x(x, y) = 3x^2(1 + y^2)e^{3xy^2}$, (b) $g_x(x, y) = yx^{y-1}$, (c) $h_x(x, y, z) = 2y + e^x \sin(z - 3y)$,
 $f_y(x, y) = 6x^4ye^{3xy^2}$; $g_y(x, y) = x^y \log x$; $h_y(x, y, z) = 2x - 3e^x \cos(z - 3y)$,
 $h_z(x, y, z) = e^x \cos(z - 3y)$.

$$8. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

são ambas descontínuas em $(0, 0)$.

9. (a) Note que $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = 1 + \frac{1}{y - z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) = \frac{z - x}{(y - z)^2}$ e $\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x - y}{(y - z)^2}$;
 (b) Note que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + (2 + x)e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + xe^{x+y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 + (1 + x)e^{x+y}$.

10. (a)-(b) Não existe f [observa-se que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ são contínuas, contudo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, o que contraria o Teorema de Schwarz];
 (c) i. Existe f , mas não única [$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$];
 ii. Existe f e é única [$f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 1$].

$$11. \nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right), \quad Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{y - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix}.$$

12. (a) $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$;

$$(b) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} |h| \frac{|h^2 - k^2|}{h^2 + k^2} \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

pois $|h^2 - k^2| \leq h^2 + k^2$ e $|k| = \sqrt{k^2} \leq \sqrt{h^2 + k^2}$, logo $0 \leq \frac{|h^2 - k^2|}{h^2 + k^2} \leq 1$ e $0 \leq \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq 1$.

(c) Sim, pois f é diferenciável em $(0, 0)$.

13. (a) Não; (b) i. não existe $f_x(1, 3)$ nem $f_y(1, 3)$, $f_x(3, 1) = -\frac{1}{16}$ e $f_y(3, 1) = \frac{1}{16}$;
 (c) i. Não; ii. Sim [f_x e f_y existem numa vizinhança de $(3, 1)$ e são contínuas em $(3, 1)$].

14. (a) f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$; (b) Não;
 (c) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ e f_x, f_y não são contínuas em $(0, 0)$ [como existem f_x e f_y numa vizinhança de $(0, 0)$, se f_x ou f_y fosse contínua em $(0, 0)$, então f seria diferenciável em $(0, 0)$, o que contraria a alínea anterior].

15. (a) $k = 2$; (b) não existe; (c) não existe.

16. (a) $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$; (b) Não;

(c) para $h \neq 0$ e $k = 0$, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^2 \sin \frac{1}{h}|}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| \left| \sin \frac{1}{h} \right| = 0$,

para $h = 0$ e $k \neq 0$, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|k^2 \sin \frac{1}{k}|}{\sqrt{h^2}} = \lim_{k \rightarrow 0} |k| \left| \sin \frac{1}{k} \right| = 0$,

para $h \neq 0$ e $k \neq 0$, $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$,

logo $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$.

17. (a) 0.93; (b) 5.003.

18. Como a função $f(x, y) = \pi x^2 y$ fornece o volume de um cilindro de raio da base x e altura y , o acréscimo a determinar é aproximadamente igual a

$$0.2 \frac{\partial f}{\partial x}(3, 12) - 0.5 \frac{\partial f}{\partial y}(3, 12) = 9.9 \pi \approx 31.086 \text{ cm}^2 \quad (\text{considerando } \pi \approx 3.14).$$