Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Matemáticas Gerais II

1.ª Prova de Avaliação Periódica - 08/11/2005 **Duração:2h**

Nome: **[Nota: / 200]**

Número mecanográfico: **Folhas suplementares:**

Declaro que desisto ☐ ....

Proposta de Resolução

[/ **30**] 1. Determine a matriz X que satisfaz a equação matricial $2\,X^TA^{-1}B = C^T$, sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que

$$2\,X^TA^{-1}B \;=\; C^T \;\Leftrightarrow\; 2\,X^TA^{-1}BB^{-1} \;=\; C^TB^{-1} \;\underset{BB^{-1}=I_2}{\overset{}{\Leftrightarrow}}\; X^TA^{-1}A \;=\; \tfrac{1}{2}\,C^TB^{-1}A \;\underset{A^{-1}A=I_2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\; (X^T)^T = \left(\tfrac{1}{2}\,C^TB^{-1}A\right)^T \;\Leftrightarrow\; X \;=\; \tfrac{1}{2}\,A^T\left(B^{-1}\right)^TC.$$

Como B é uma matriz diagonal, então B^{-1} também é diagonal, tendo-se

$$(B^{-1})^T = B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[/ **45**] 2. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x \quad\quad + \quad z \quad\quad = 1 \\ x + ky + 2z \quad = k \\ x + y + (k+1)z = 1 \end{cases},$$

onde k é um parâmetro real.

(a) Discuta o sistema em função do parâmetro k.

(b) Considerando $k = 1$, determine o conjunto-solução do sistema.

(c) Indique, justificando, os valores de k para os quais a matriz dos coeficientes do sistema é singular.

(a) *Se o sistema é representado matricialmente por $AX = B$, então*

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 & k \\ 1 & 1 & k+1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' = L_2 - L_1 \\ L_3' = L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & k-1 \\ 0 & 1 & k & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & k-1 \end{array}\right] \underset{L_3' = L_3 - kL_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & k-1 \end{array}\right].$$

Atendendo a que existem pelo menos dois pivots e o número de incógnitas é $n = 3$, tem-se que

- *o sistema é impossível* $\Leftrightarrow \operatorname{car} A < \operatorname{car}[A\,|\,B]$
  $\Leftrightarrow \left(1 - k^2 = 0 \wedge k - 1 \neq 0\right) \Leftrightarrow k = -1$;
- *o sistema é possível determinando* $\Leftrightarrow \operatorname{car} A = \operatorname{car}[A\,|\,B] = 3$
  $\Leftrightarrow 1 - k^2 \neq 0 \Leftrightarrow (k \neq 1 \wedge k \neq -1)$;
- *o sistema é possível indeterminando de grau um* $\Leftrightarrow \operatorname{car} A = \operatorname{car}[A\,|\,B] = 2 < 3$
  $\Leftrightarrow \left(1 - k^2 = 0 \wedge k - 1 = 0\right) \Leftrightarrow k = 1$;

(b) *Se $k = 1$, pela alínea anterior, conclui-se que o sistema representado matricialmente por $AX = B$ é possível simplesmente indeterminado e*

$$[A\,|\,B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Logo o conjunto-solução do sistema é $S = \{(1 - z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(c) *A matriz A dos coeficientes do sistema é singular* $\Leftrightarrow \operatorname{car} A < 3$
$\Leftrightarrow 1 - k^2 = 0$
$\Leftrightarrow k = 1$ ou $k = -1$.

[/ **25**] 3. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5$$

e utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule

$$\begin{vmatrix} a_3+b_3 & b_3+c_3 & 2c_3 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & 2c_2 \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & 2c_1 \end{vmatrix},$$

justificando de forma clara todos os passos.

$$\begin{vmatrix} a_3+b_3 & b_3+c_3 & 2c_3 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & 2c_2 \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & 2c_1 \end{vmatrix} \underset{2C_3' = C_3}{=} 2\begin{vmatrix} a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1' = C_1 - C_2 + C_3 \\ C_2' = C_2 - C_3}}{=} 2\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ |A| = |A^T|}}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -10\,.$$

[/ **30**] 4. Calcule o elemento da primeira linha e última coluna da adjunta, e da inversa, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

sem calcular toda a matriz A^{-1}.

A adjunta de A é a transposta da matriz dos cofactores de A.

O elemento da primeira linha e última coluna da adjunta de A é o cofactor

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Regra de Sarrus}}}{=} -(6+4+0-0-8-0) = -2.$$

Pode calcular-se a inversa de A, caso exista, a partir da adjunta do seguinte modo:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}.$$

Uma vez que

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_1' = C_1 - C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Fórmula de Laplace} \\ \textit{(desenvolvimento segundo} \\ \textit{a primeira coluna)}}}{=} 2\,A_{41} = -4,$$

o elemento da primeira linha e última coluna da inversa de A é dado por

$$\frac{A_{41}}{\det A} = \frac{1}{2}.$$

[/ **30**] 5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores próprios e os vectores próprios da matriz A.

(b) Indique, justificando, se A é uma matriz diagonalizável.

(a) *Como A é uma matriz triangular superior, os valores próprios de A são os elementos da sua diagonal principal. Portanto, A possui apenas o valor próprio 2 de multiplicidade algébrica quatro.*

Para determinar os vectores próprios de A associados ao valor próprio 2, pretendem-se os vectores não nulos v que satisfazem $(A - 2I_4)\, v = 0$, ou seja,

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z \\ t & = & 0 \end{array} \right. ,$$

$x, z \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos.

O conjunto dos valores próprios de A é $\sigma(A) = \{2\}$.

O conjunto dos vectores próprios de A associados ao valor próprio 2 é

$$V_2(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} : \ x, z \in \mathbb{R} \textit{ não simultaneamente nulos} \right\}.$$

(b) *Como os vectores próprios de A (associados ao valor próprio 2) são da forma*

$$\begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \qquad x, z \in \mathbb{R} \textit{ não simultaneamente nulos,}$$

então A possui, no máximo, dois vectores próprios linearmente independentes; por exemplo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

são dois vectores próprios de A linearmente independentes, pois satisfazem

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Conclui-se que A não é diagonalizável, pois A é uma matriz 4×4 e não possui 4 vectores próprios linearmente independentes.

[/ **40**] 6. Responda apenas a quatro das cinco questões seguintes.

Indique, justificando convenientemente, se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se A e B são matrizes $n \times n$, então $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.

(b) Se A é uma matriz 4×3 e o sistema representado matricialmente por $AX = 0$ tem uma solução não nula, então $\operatorname{car} A = 3$.

(c) Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = 0_n$, então $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$.

(d) Se A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 3$, então $\det(2A^T) = 6$.

(e) Os vectores $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ são linearmente dependentes.

(a) *A afirmação é falsa.*

Se A e B são matrizes $n \times n$ não comutáveis, i.e., $BA \neq AB$, então $AB + BA \neq 2AB$ e

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2.$$

(Ou apresenta-se um contraexemplo:

se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *então* $(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq A = A^2 - 2AB + B^2$.*)*

(b) *A afirmação é falsa.*

Um sistema homogéneo do tipo $AX = 0$ admite sempre a solução nula. Se, além disso, tem uma solução não nula, então $AX = 0$ é um sistema possível indeterminado, o que se verifica se e só se a característica de A é inferior ao número de colunas de A, isto é, $\operatorname{car} A < 3$.

(c) *A afirmação é verdadeira.*

Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^2 = 0_n$, então

$$(I_n + A)(I_n - A) = I_n + A - A - A^2 = I_n.$$

Portanto, existe uma matriz B tal que $(I_n + A)B = I_n$, o que implica que $B(I_n - A) = I_n$, ou seja, $I_n + A$ é invertível e $(I_n + A)^{-1} = B = I_n - A$.

(d) *A afirmação é falsa.*

Se A é uma matriz 3×3 com $\det(A) = 3$, então $\det(2A^T) = 2^3 \det(A^T) = 2^3 \det(A) = 24$.

(e) *A afirmação é verdadeira.*

Os vectores $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$ são linearmente dependentes, pois

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + (-1) - 0 - 0 - 1 = 0.$$

(Ou nota-se que $v_1 = 2v_2 - v_3$, isto é, v_1 escreve-se como combinação linear de v_2 e v_3.)