Métodos Baseados em Comparações Binárias

Domingos M. Cardoso (dcardoso@mat.ua.pt)
Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 3810-193 Aveiro, Portugal

16 de Junho de 2000

Resumo. Embora a discussão deste tópico no Encontro/Debate tenha sido mais alargada este pequeno relatório incide apenas sobre o Método Analítico Hierárquico.

Keywords: Multiple-criteria Analysis, Analytic Hierarchy Process.

1. Introdução

O Método Analítico Hierárquico (AHP) (Saaty, 1990), apesar das muitas críticas que tem recebido em variadíssimos contextos, na sua versão clássica ou com algumas adaptações, conta-se entre as metodologias mais populares para a abordagem dos problemas multiatributo.
Com o AHP o modelo é desenhado de acordo com uma estrutura hierárquica com três ou mais níveis. De um modo esquemático, no primeiro respresenta-se o objectivo, o seguinte inclui os critérios (ou atributos) e as diferentes alternativas estão associadas ao último nível.
Como exemplo, considerando a escolha de um automóvel, de entre um conjunto de quatro possíveis, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, tendo em conta o preço, a segurança e o conforto, obtêm-se os níveis representados na figura a seguir.

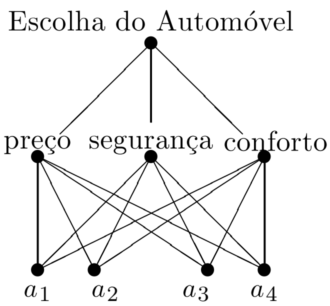

Figure 1. Diferentes níveis para a escolha de um automóvel.

Resumidamente o procedimento adoptado pelo AHP, para a selecção de alternativas, baseia-se numa sequência de comparações binárias. Primeiro entre pares de diferentes critérios de modo a determinar-se a importância relativa dos critérios e depois entre os diferentes pares de alternativas, observadas segundo o ponto de vista de cada critério. As comparações binárias são organizdas em Matrizes cujas entradas são quocientes de importância relativa entre cada par

de critérios e cada par de alternativas, dentro de uma certa escala de valores. Deve observar-se que sendo A uma tal matriz, as entradas da diagonal principal ($\alpha_{ii},\ i \in \{1,\ldots,n\}$) devem ser todas iguais à unidade e para as restantes entradas ($\alpha_{ij},\ i,j \in \{1,\ldots,n\}$) se $\alpha_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ então $\alpha_{ji} = \frac{w_j}{w_i}$.
Uma vez determinada a matriz A, diz-se que existe inconsistência (ou que não existe consistência) quando dadas as entradas α_{ij}, α_{jk} e α_{ik} se verifica a desigualdade, $\alpha_{ij} \times \alpha_{jk} \neq \alpha_{ik}$. Quando não existe consistência verifica-se que $\lambda_{max}(A) > n$ e em (Saaty, 1990) propõe-se a utilização do quociente $\frac{\lambda_{max}(A)-n}{n}$ como estimador do grau de consistência, o qual é designado por índice de consistência. Quanto menor é este índice maior é o grau de consistência.

2. Descrição Resumida do AHP

De acordo com a metodologia clássica do AHP as comparações binárias são feitas numa escala entre 0 e 9 e, depois de todas as comparações efectuadas, sendo A^0 a matriz $p \times p$ de comparações entre os p critérios, A^k (com $k \in \{1,\ldots,p\}$) a matriz $n \times n$ de comparações binárias entre as n alternativas avaliadas segundo o ponto de vista do k-ésimo critério, e $\hat{u}^k$ o vector próprio associado a $\lambda_{max}(A^k)$ (para $k \in \{0,\ldots,p\}$), o qual se supõe normalizado de tal forma que a soma das suas componentes seja igual à unidade, determina-se o vector de pesos globais, das preferências relativas a todos os critérios, $\hat{u}$, fazendo

$$\hat{u} = U\hat{u}^0,$$

onde U denota a matriz cujas colunas são os vectores próprios $\hat{u}^1,\ldots,\hat{u}^p$, i.e., $U = [u^1 \ldots u^p]$. Nestas condições, o vector de pesos globais obtido, $\hat{u}$, vem também normalizado com a soma das componentes igual à unidade. Com efeito, sendo u_i a i-ésima componente de $\hat{u}$, u_i^k a i-ésima componente do vector $\hat{u}^k$, com $k = 0,\cdots,p$, vem que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} u_i &= \sum_{i=1}^{n}(U\hat{u}^0)_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} u_k^0 u_i^k) \\
&= \sum_{k=1}^{p} u_k^0(\sum_{i=1}^{n} u_i^k) = \sum_{k=1}^{p} u_k^0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

A partir do vector de pesos globais, $\hat{u}$, poderá seleccionar-se a alternativa de peso máximo.
Voltando ao exemplo inicial, suponha-se que as comparações binárias entre

critérios (os quais vamos abreviar por *prec*, *segu* e *conf*) produziram a seguinte matriz:

$$A^0 = \begin{array}{c} \\ prec \\ segu \\ conf \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} prec & segu & conf \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{1} & \frac{2}{1} \\ \frac{1}{6} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

para a qual $\lambda_{max}(A^0) = 3.136$ e, consequentemente, o índice de consistêcia é

$$\frac{\lambda_{max}(A^0) - n}{n} = \frac{0.136}{3} = 0.045.$$

Por sua vez, o vector próprio de A^0 associado a $\lambda_{max}(A^0)$ corresponde ao vector

$$\hat{w}^0 = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.15 \\ 0.22 \end{bmatrix}.$$

Seguidamente, a partir das comparacções binárias entre os diferentes pares de alternativas para cada um dos critérios obtêm-se as matrizes:

$$A_{prec} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{1} & \frac{7}{1} & \frac{7}{1} \\ \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{1} & 1 & \frac{4}{1} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

com $\lambda_{max}(A_{prec}) = 4.701$, $\frac{\lambda_{max}(A_{prec})-4}{4} = \frac{0.701}{4} = 0.175$ e $\hat{u}_{prec} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.09 \\ 0.20 \\ 0.04 \end{bmatrix}$;

$$A_{segu} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{9}{1} & 1 & \frac{8}{1} & \frac{7}{1} \\ \frac{5}{1} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{6}{1} & \frac{1}{7} & \frac{3}{1} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

com $\lambda_{max}(A_{segu}) = 4.413$, $\frac{\lambda_{max}(A_{segu})-4}{4} = \frac{0.413}{4} = 0.103$ e $\hat{u}_{segu} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.69 \\ 0.10 \\ 0.17 \end{bmatrix}$;

$$A_{conf} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A1 & A2 & A3 & A4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{1} & \frac{6}{1} & \frac{8}{1} \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{1} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{1} & 1 & \frac{6}{1} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

com $\lambda_{max}(A_{conf}) = 4.335$ e, $\frac{\lambda_{max}(A_{conf})-4}{4} = \frac{0.335}{4} = 0.084$ e $\hat{u}_{conf} = \begin{bmatrix} 0.66 \\ 0.08 \\ 0.21 \\ 0.05 \end{bmatrix}$.

Deste modo obtém-se a matriz dos vectores próprios

$$U = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} prec & segu & conf \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.67 & 0.04 & 0.66 \\ 0.09 & 0.69 & 0.08 \\ 0.20 & 0.10 & 0.21 \\ 0.04 & 0.17 & 0.05 \end{pmatrix} \end{array}$$

a qual, multiplicando por $\hat{u}^0$, determina o vector de pesos globais

$$U\hat{u}^0 = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.18 \\ 0.19 \\ 0.06 \end{pmatrix}$$

donde se obtém a relação de preferência, R, que determina a ordenação

$$a_4 \prec_R a_2 \prec_R a_3 \prec_R a_1.$$

3. Inconsistência e Intransitividade

Uma vez determinadas as entradas de uma matriz A, α_{ij} (com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$),que são dadas pelos quocientes que definem a importância relativa entre cada par de alternativas do conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, segundo o ponto de vista de um dado critério, existe uma relação de preferência, $R \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, definida por

$$(a_i, a_j) \in R \quad \text{sse} \quad \alpha_{ij} < 1. \tag{1}$$

Infelizmente, nesta fase, é muito comum a ocorrência de inconsistências e a determinação de relações intransitivas. Existe inconsistência quando α_{ij} e α_{jk} definem a importância relativa entre os pares de alternativas (a_i, a_j) e (a_j, a_k), respectivamente, e contudo, $\alpha_{ij} \times \alpha_{jk} \neq \alpha_{ik}$. Por outro lado existe intransitividade quando a_j é preferível a a_i e a_k é preferível a a_j mas a_k não é preferível a a_i.
Uma relação R definida no conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é transitiva quando

$$(a_{j_1}, a_{j_2}) \in R \ \wedge \ (a_{j_2}, a_{j_3}) \in R \Rightarrow (a_{j_1}, a_{j_3}) \in R.$$

Conforme se verá mais adiante, a consistência implica a transitividade da relação de preferência definida pela matriz de comparações binárias.

Se existe consistência na determinação da matriz, A, dos quocientes de importância relativa entre n alternativas avaliada segundo o ponto de vista de um certo critério, existe um vector de pesos positivos $\hat{w}$ tal que $A\hat{w} = n\hat{w}$, i.e., $\hat{w}$ é o vector próprio de A associado ao máximo valor próprio $\lambda_{max}(A) = n$. Por outro lado, se a consistência se verifica também é fácil concluir que todos os valores próprios, com excepção de $\lambda_{max}(A)$ são iguais a zero, uma vez que, em tais condições $rank(A) = 1$.
Note-se que a consistência implica que se tenha $A = \hat{w}\hat{w}^{-1}$, onde $\hat{w}^{-1}$ denota o vector o vector linha $[\frac{1}{w_1}, \cdots, \frac{1}{w_n}]$, ou seja,

$$A = \hat{w}\hat{w}^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} [\frac{1}{w_1}, \cdots, \frac{1}{w_n}],$$

Tendo em conta que, $A\hat{v} = (\sum_{j=1}^{n} \frac{v_j}{w_j}) \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix}$, qualquer vector $\hat{v}$ ortogonal ao vector $\hat{w}^{-1}$ (e existem $n-1$ vectores, linearmente independentes, nestas condições) é vector próprio de A asssociado ao valor próprio nulo e, por outro lado,

$$A\hat{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} [\frac{1}{w_1}, \cdots, \frac{1}{w_n}] \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_{max}(A) = n$ é o único valor próprio não nulo de A.

THEOREM 1. *Seja A^k a matriz $n \times n$ das comparações binárias entre n alternativas avaliadas segundo o ponto de vista do k-ésimo critério (com $k \in \{1, \ldots, p\}$). Se as comparações binárias determinadas por A^k são consistentes então a relação de preferência associada, R^k, é transitiva.*

Proof. Suponha-se que as comparações binárias determinadas por A^k são consistentes, mas a correspondente relação de preferência R^k não é transitiva. Então existem alternativas a_{j_1}, a_{j_2} e a_{j_3} tais que

$$(a_{j_1}, a_{j_2}) \in R^k,\ (a_{j_2}, a_{j_3}) \in R^k \ \wedge \ (a_{j_1}, a_{j_3}) \notin R^k \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha_{j_1j_2} < 1,\ \alpha_{j_2j_3} < 1 \ \wedge \ \alpha_{j_1j_3} \geq 1. \tag{3}$$

Contudo, tendo em conta a consistência, $\exists w^k \in I\!R^n$ tal que $A^k w^k = nw^k$ e consequentemente

$$\alpha_{j_1j_2} = \frac{w^k_{j_1}}{w^k_{j_2}},\ \alpha_{j_2j_3} = \frac{w^k_{j_2}}{w^k_{j_3}} \text{ e } \alpha_{j_1j_3} = \frac{w^k_{j_1}}{w^k_{j_3}}$$

Logo por (3)

$$w^k_{j_1} < w^k_{j_2},\ w^k_{j_2} < w^k_{j_3} \text{ e } w^k_{j_1} \geq w^k_{j_3}$$

o que constitui uma contradição. ■

4. Algumas Vantagens e Inconvenientes Associados ao AHP

Têm sido apontadas muitas críticas ao AHP, não só pelas implicaçõs negativas que a inconsistência pode ter, como também pelo facto da eliminação ou adição de alternativas poder produzir inversões na ordenação inicialmente obtida. Entre outras críticas destacam-se as que se referem-se à rigidez da escala proposta para definir os diferentes níveis de preferência (Lootsma, 1992) e (Olson, Fliedner and Currie, 1995), a exigência associada ao tipo de comparações numéricas a efectuar para a determinação da importância relativa das alternativas, etc. Existem, no entanto, vários factores positivos associados a esta metodologia, como sejam, a estruturação proposta para a obtenção dos modelos e uma certa robustez e amigabilidade em muitas situações (Lockett and Hetherington, 1985). Adicionalmente, a metodologia proposta para a obtenção dos pesos associados aos diferentes critérios, eventualmente com iterações sucessivas baseadas nos valores dos índices de concordância que se vão obtendo, parece ser uma boa opção.

Referências

Lockett, A.G. and B. Hetherington. The Analytic Hierarchy Process: Experiments in Stability. In P. Serafini (ed.), *Mathematics of Multi Objective Optimization.* Springer, Wien (1985):316–1351.

Lootsma, F. A. The REMBRANDT system for multi-criteria decision analysis via pairwise comparisions or direct rating. Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology. Report 92–05, Delft (1992).

Olson, D. L., G. Fliedner and K. Currie. Comparision of the REMBRANDT system with analytic hierarchy process. European Journal of Operations Research 82 (1995):522–539.

Saaty, T. L. The Analytic Hirarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation. RWS Publications, Pittsburgh (1990).