



Métodos baseados na relação de prevalência

José Figueira

FEUC

Encontro-Debate: Departamento de
Matemática da Universidade de Aveiro

8 de Junho de 2000



Apresentação baseada em Dias et. Al (1997)



-
-
-

Os métodos ELECTRE

- O método ELECTRE I
- O método ELECTRE IV
- O método ELECTRE IS

ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité)

Bibliografia:

1. Dias, L., Alçada, L. & Clímaco, J. (1997): Apoio multicritério à decisão, FEUC.
2. Roy, B. (1985): Méthodologie multicritère d'aide à la décision, Economica, Paris.
3. Roy, B. & Bouyssou (1993): Aide multicritère à la décision: méthodes et cas, Economica, Paris.

-
-
-

Dados

- Uma família coerente F com n critérios, g_1, \dots, g_n .
- Um conjunto A de m acções $a_i, i=1, \dots, m$
- Um coeficiente de importância k_j para cada critério $g_j, j=1, \dots, n$.
- Outra informação suplementar a definir posteriormente

-
-
-

Problemáticas de decisão

- Problemática α (escolha de uma ou várias acções): métodos ELECTRE I, IV e IS.
- Problemática γ (ordenação): métodos ELECTRE II, III e IV.
- Problemática β (separação): método ELECTRE TRI
- Problemática δ (descrição)

-
-
-

Métodos de prevalência (2 fases)

- Fase I: Construção de uma ou várias relações de prevalência. Dados: matriz de desempenhos + alguma informação suplementar.
- Fase II: Exploração da relação ou relações de prevalência.

•
•
•

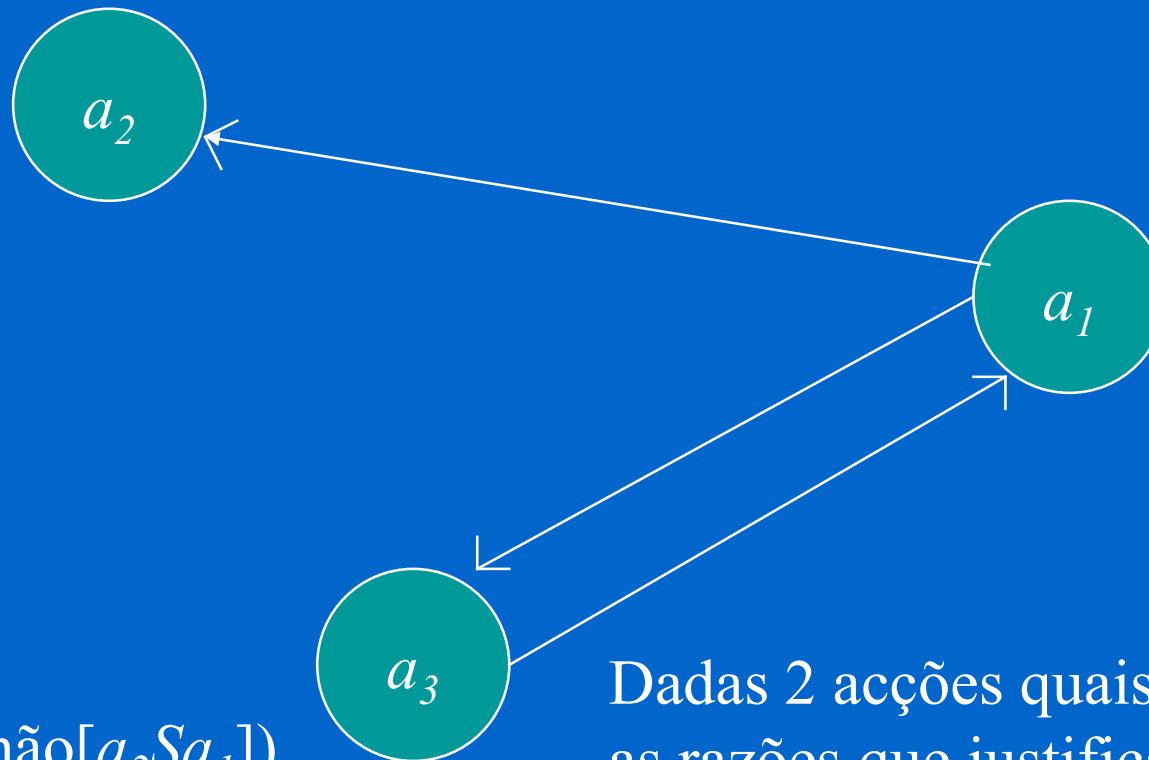
Relações fundamentais

- P , preferência estrita
- I , indiferença
- Q , preferência fraca (hesitação entre P e I)
- R , incomparabilidade
- A partir destas quatro relações fundamentais podemos definir outras relações
 $S = P \cup Q \cup I$
- $a_i S a_k$ significa “ a_i é pelo menos tão boa como a_k ”

• • • • • • • •

-
-
-

Exemplo (relação S)



a_1Pa_2 (a_1Sa_2 e não $[a_2Sa_1]$)

a_1Ia_3 (a_1Sa_3 e a_3Sa_1)

a_3Ra_2 (não $[a_3Sa_2]$ e não $[a_2Sa_3]$)

Dadas 2 acções quaisquer a_i e a_k , as razões que justificam a afirmação a_iSa_k dependem do método.

⋮

O modelo do pseudo-critério

Limiares constantes

$$\left\{ \begin{array}{l} |g_j(a) - g_j(b)| \leq q \Rightarrow aI_j b \\ q < g_j(a) - g_j(b) \leq p \Rightarrow aQ_j b \\ g_j(a) - g_j(b) > p \Rightarrow aP_j b \end{array} \right.$$

-
-
-



aS_jb

bS_ja

aP_jb

aQ_jb

aI_jb

bQ_ja

bP_ja



$g_j(a)-p$

$g_j(a)-q$

$g_j(a)$

$g_j(a)+q$

$g_j(a)+p$

$g_j(b)$



-
-
-
-
-
-
-
-

-
-
-

Outros modelos

- Modelo do verdadeiro-critério: $q_j = p_j = 0$.
- Modelo do semi-critério: $q_j = p_j$.
- Modelo do pré-critério: $q_j = 0$.

-
-
-

ELECTRE I

- Todos os critérios são de maximização
- As escalas dos critérios são de amplitude comparável
- Normalmente procede-se a uma normalização para que as duas exigências anteriores se verifiquem simultaneamente
- Modelo do verdadeiro-critério

-
-
-

A - Construção da relação (1)

Para cada par ordenado de alternativas a_i, a_k
verificar se $a_i S a_k$

1º Partição do conjunto dos critérios em dois subconjuntos (coligação concordante e a coligação discordante com a afirmação $a_i S a_k$)

$$F^C(a_i, a_k) = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} \mid g_j(a_i) \geq g_j(a_k) \right\}$$

$$F^D(a_i, a_k) = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} \mid g_j(a_i) < g_j(a_k) \right\}$$

-
-
-

A - Construção da relação (2)

2º definição de 2 índices para cada par ordenado (a_i, a_k) : o índice de concordância e o índice de discordância

$$C(a_i, a_k) = \frac{\sum_{j \in F^C(a_i, a_k)} k_j}{\sum_{j=1}^n k_j}$$

$$D(a_i, a_k) = \max_{j \in F^D(a_i, a_k)} \{g_j(a_k) - g_j(a_i)\}$$

•
•
•

A - Construção da relação (3)

3º Para se concluir que $a_i Sa_k$ é necessário que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições:

- Condição de concordância $C(a_i, a_k) \geq c$, onde c é um limiar de concordância.
- Condição de discordância $D(a_i, a_k) \leq d$, onde d é um limiar de discordância que representa o máximo que a_k poderá ser melhor que a_i sem por em causa a afirmação $a_i Sa_k$.
- *O método indica se $a_i Sa_k$ ou não $[a_i Sa_k]$.*

-
-
-

B - Exploração da relação

- Objectivo: escolher um conjunto de acções tão restrito quanto possível, mas que contenha a melhor acção
- Núcleo - conjunto seleccionado pelo ELECTRE I. As acções do núcleo devem verificar 2 condições
- Estabilidade interna: nenhuma acção do núcleo pode prevalecer sobre outra acção pertencente ao núcleo
- Absorção: qualquer acção não pertencente ao núcleo é prevalecida por pelo menos uma acção do núcleo

Exemplo: matriz de decisão

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
a_1	0.773	0.450	0.778	0.392	1.000	0.000
a_2	0.364	0.300	0.667	1.000	0.500	1.000
a_3	0.182	0.700	1.000	0.765	0.000	0.667
a_4	1.000	0.000	0.000	0.922	0.500	0.667
a_5	0.000	1.000	1.000	0.353	0.500	0.667
a_6	0.455	0.750	0.556	0.000	1.000	0.333
a_7	0.341	0.250	0.578	0.882	0.500	1.000
k_i	4	2	4	5	2	1

Matriz de concordância

	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
a ₁	----	0.667	0.333	0.444	0.611	0.833	0.667
a ₂	0.333	----	0.667	0.778	0.667	0.556	1.000
a ₃	0.667	0.333	----	0.389	0.778	0.556	0.333
a ₄	0.556	0.333	0.667	----	0.667	0.556	0.699
a ₅	0.389	0.444	0.500	0.500	----	0.667	0.444
a ₆	0.278	0.444	0.444	0.444	0.333	----	0.444
a ₇	0.333	0.167	0.667	0.500	0.667	0.556	----

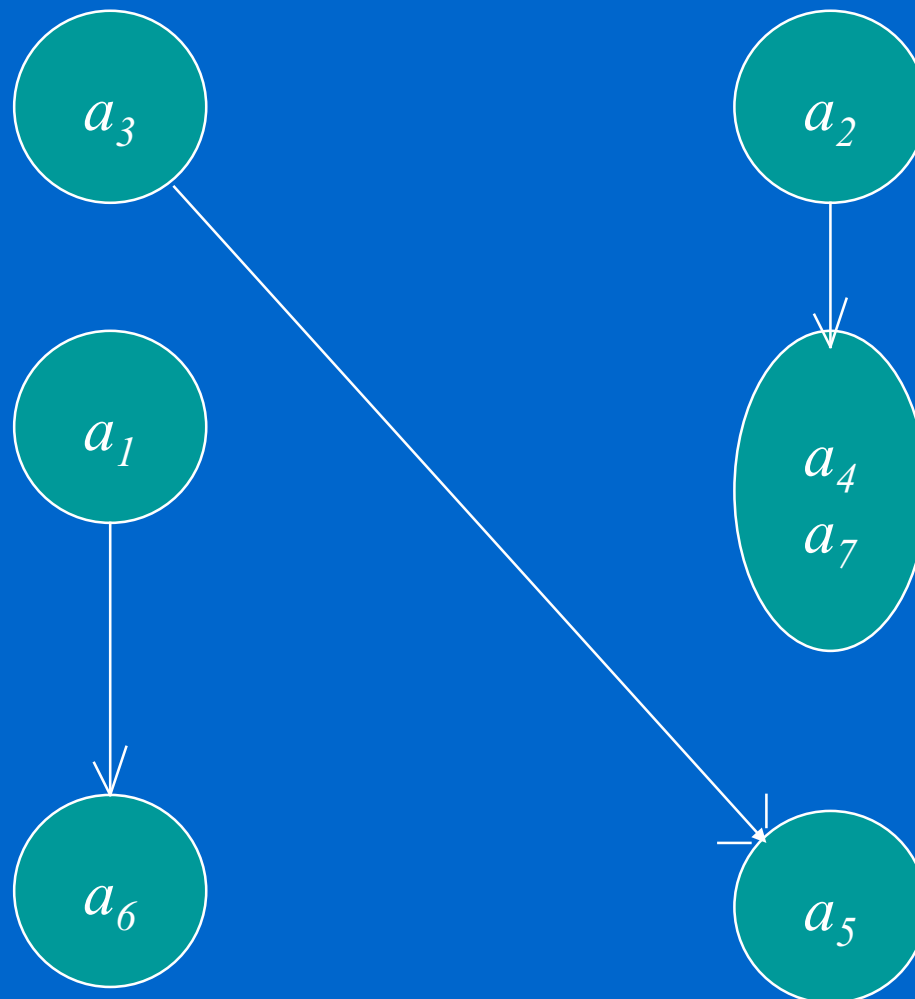
Matriz de discordância

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	—	1.000	0.667	0.667	0.667	0.333	1.000
a_2	0.409	—	0.400	0.667	0.700	0.450	0.000
a_3	0.667	0.333	—	0.818	0.333	0.667	0.333
a_4	0.667	0.571	0.857	—	1.000	0.750	0.495
a_5	0.773	0.647	0.412	1.000	—	0.455	0.529
a_6	0.392	1.000	0.765	0.922	0.381	—	0.882
a_7	0.432	0.118	0.450	0.659	0.750	0.500	—

-
-
-

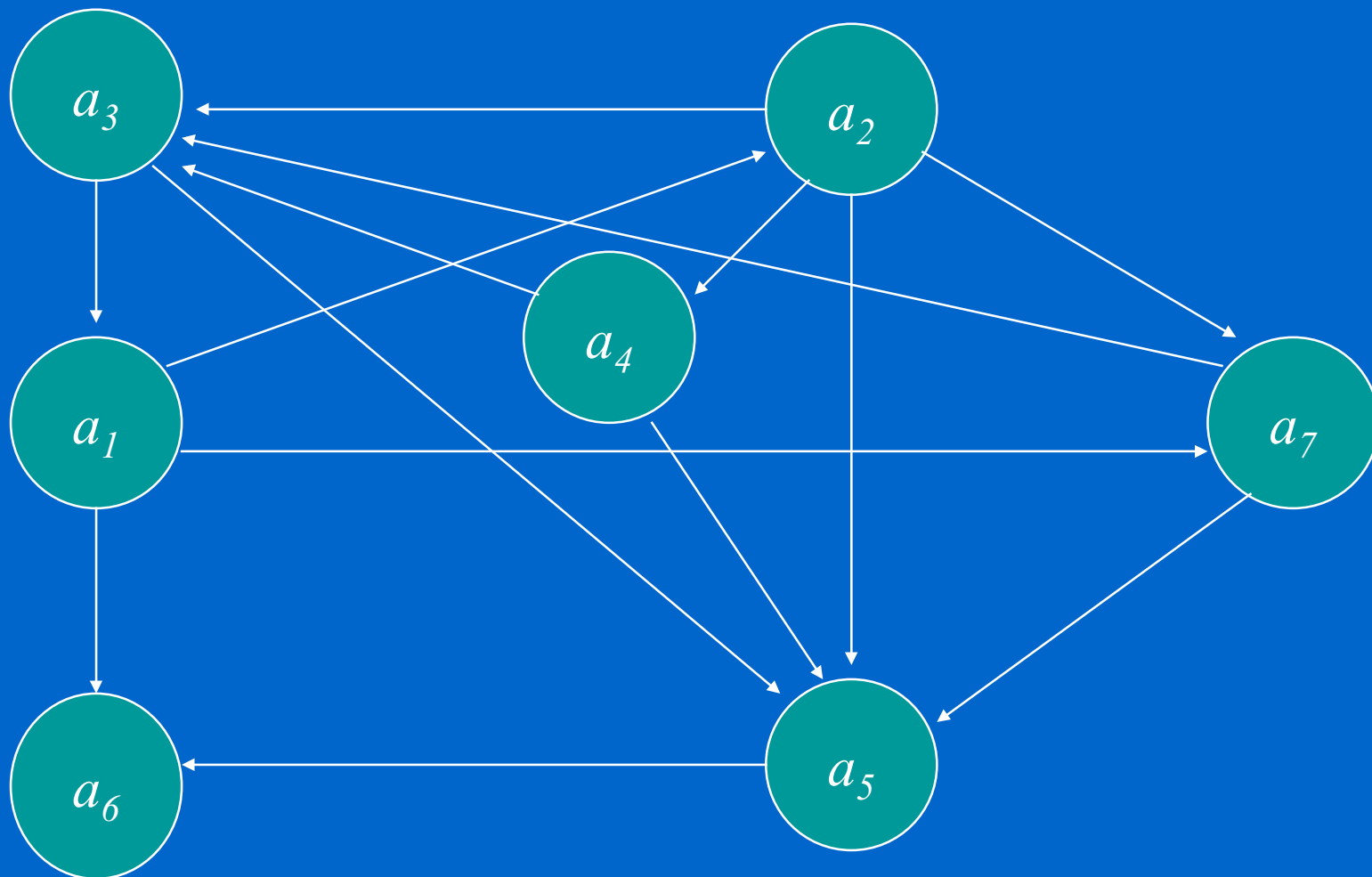
$$c=0.667 \text{ e } d=1$$

$N=\{a_1, a_2, a_3\}$



•
•
•

$$c=0.667-0.01 \text{ e } d=1$$



-
-
-

Detectar os ciclos

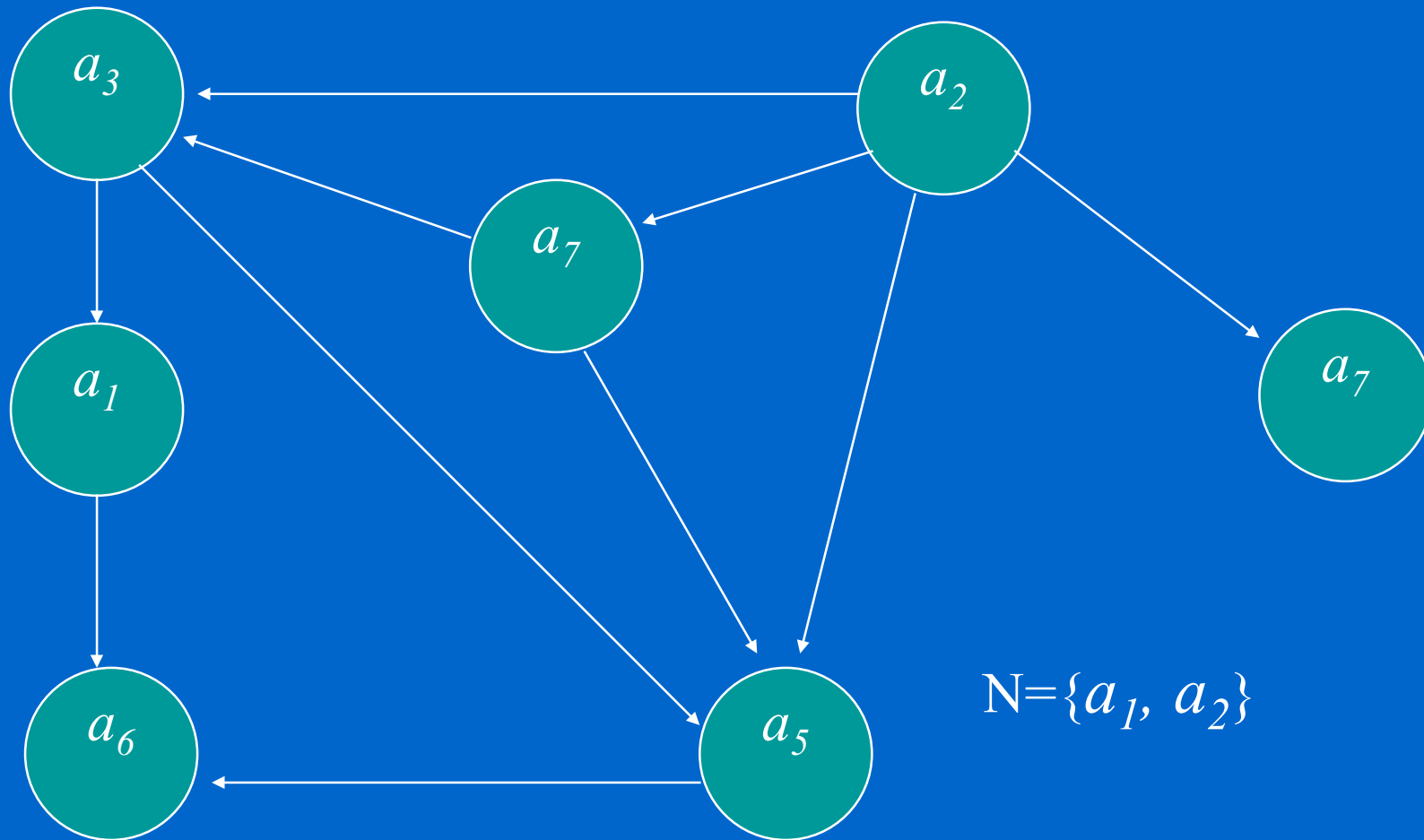
Ciclo máximo: $a_1 - a_2 - a_7 - a_3 - a_1 - a_2 - a_4 - a_3 - a_1$

Este ciclo inclui os três ciclos seguintes:

- $a_1 - a_2 - a_3 - a_1$
- $a_1 - a_2 - a_7 - a_3 - a_1$
- $a_1 - a_2 - a_4 - a_3 - a_1$

$$N = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_7\}$$

$c=0.666$ e $d=0.8$



-
-
-

Conclusões

- Para os três conjuntos de parâmetros podemos dizer que:
- as acções a_1 e a_2 estão sempre no núcleo
- a_3 aparece em dois núcleos pelo que não podemos rejeitá-la

-
-
-

O método ELECTRE IV (1)

- As escalas são não normalizadas (é mais fácil para o decisor pensar em termos de escalas não normalizadas; o método de normalização pode ter influências nos resultados finais).
- A condição de concordância não se altera.
- A condição de discordância altera-se porque vamos considerar agora a existência de um limiar de veto, v_j para cada critério.

•
•
•

O método ELECTRE IV (2)

- Consideremos um critério de maximização. Assim, se $g_j(b) \geq g_j(a) + v_j$, então não se pode afirmar que $a S_j b$.
- A prevalência de a sobre b é vetada pelo critério j . A nova condição de discordância é a seguinte (ausência de veto):

$$\neg \exists j \in F^D(a, b) \text{ tal que } |g_j(a) - g_j(b)| \geq v_j$$

-
-
-

O método ELECTRE IS(1)

- Passagem para o modelo do pseudo-critério.
- O índice de concordância sofre alterações. Nos métodos ELECTRE I e Iv cada critério contribui para o numerador com k_j ou com 0 unidades. Neste método a transição é feita de forma gradual. Assim, cada critério j contribui com k_j unidades se aS_jb (aP_jb , aQ_jb ou aI_jb) ou com 0 unidades se bP_ja ou com um valor intermédio se bQ_ja .

-
-
-

O método ELECTRE IS(2)

Índice de concordância parcial (critério a maximizar):

$$c_j(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{se } g_j(a) \geq g_j(b) - q_j \\ 0, & \text{se } g_j(a) < g_j(b) - p_j \\ \frac{g_j(a) + p_j - g_j(b)}{p_j - q_j}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Índice de concordância global:

$$C(a,b) = \frac{\sum_{j=1}^n k_j c_j(a,b)}{\sum_{j=1}^n k_j}$$