Grafos Bem-cobertos e Algumas Generalizações

Rommel Barbosa (rommel@acm.org)
Departamento de Matemática, ICET
Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil

Abril de 2001

Resumo. Um grafo $G = (V, E)$ é **Bem-coberto** se todo conjunto independente maximal em G for máximo. Um grafo é Z_m-**bem-coberto** se $|I| \equiv |J| \pmod{m}$, $\forall I$, J conjuntos independentes maximais de vértices em $V(G)$. Um grafo G pertence a classe $M(t)$, se ele tiver exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais de vértices. Apresentamos aqui alguns resultados sobre essas classes de grafos.

Keywords: Grafos bem-cobertos, conjuntos independentes maximais

1. Notação e resultados preliminares

A notação utilizada aqui segue a mesma usada em(Bondy and Murty, 1976). Alguns dos resultados apresentados neste capítulo são também discutidos em(Hartnell, 1999; Plummer, 1993). Nosso objetivo aqui é apresentar a notação e definições que serão utilizadas nas outras seções.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Indicamos por $V(G)$ o conjunto dos vértices de G e por $E(G)$ o conjunto das arestas de G. Dados $u, v \in V(G)$, indicamos por $u \sim v$ quando u for adjacente a v. Um conjunto I de vértices é dito ser independente se quaisquer dois elementos de I não forem unidos por uma aresta. Um conjunto independente de vértices I é dito ser maximal, se não existir outro conjunto independente J que contenha propriamente I. O tamanho do maior conjunto independente do grafo G, denotado por $\alpha(G)$, é chamado de número de independência de G. Uma aresta $e \in E(G)$ é dita ser **crítica** se $\alpha(G \backslash e) \geq \alpha(G)$. Um **emparelhamento** no grafo G é um subconjunto M de $E(G)$ tal que quaisquer duas arestas em M não possuem vértice em comum. Um emparelhamento M é dito ser maximal se não existir outro emparelhamento M^* que contenha propriamente M. Um emparelhamento máximo é um emparelhamento de maior cardinalidade em G. Um emparelhamento é **perfeito** quando todos os vértices do grafo G forem incidentes a uma aresta do emparelhamento. Um grafo G é **equiemparelhável**(Lesk, Plummer, and Pulleyblank, 1984) se todo emparelhamento maximal de G tiver o mesmo tamanho.

Embora seja fácil determinar um emparelhamento máximo em qualquer grafo G, o mesmo não ocorre para determinar o número de independência de um grafo.

Karp(Karp, 1972) mostrou que o problema de determinação do número de independência para grafos, em geral, é NP-completo. É importante então, estudar classes de grafos para as quais a determinação deste parâmetro tenha complexidade polinomial.

Indicamos por $N(v)$ o conjunto dos vértices adjacentes a v em G, e por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. O grafo complemento do grafo G, indicado por $\overline{G}$, é o grafo tendo como vértices o conjunto $V(\overline{G}) = V(G)$ e $u \sim v$ em $V(\overline{G})$ sempre que $u \not\sim v$ em G. Dado $v \in V(G)$ definimos o grau de v, e indicamos por $gr(v)$, ao número de arestas incidentes ao vértice v.

Uma **folha** é um vértice de grau 1 em um grafo. Um **talo** é um vértice adjacente a uma folha. Um **arbusto** é um subgrafo induzido por um talo e suas folhas.

Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** quando o conjunto de vértices $V(G)$ puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios V_1 e V_2, tais que vértices de um mesmo conjunto não são adjacentes entre si.

Dados $v \in V(G)$, e $S \subseteq V(G)$, dizemos que v **domina** o conjunto S, se v for adjacente a todo vértice de S. Dados $u, v \in V(G)$, dizemos que o vértice v domina o vértice u quando $u \sim v$.

Um grafo G é **bem-coberto** se todo conjunto independente maximal de vértices em G tiver mesma cardinalidade. Os grafos bem-cobertos foram introduzidos por Plummer(Plummer, 1970). A classe dos grafos bem-cobertos é uma das classes para a qual o número de independência pode ser calculado de maneira mais simples. De fato, para essa classe, basta utilizarmos o algoritmo guloso para determinarmos um conjunto independente maximal que também será máximo.

A questão agora é: Podemos reconhecer se um grafo é bem-coberto em tempo polinomial?

A propriedade de não ser bem-coberto está em NP. De fato, basta exibirmos dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

Chvátal e Slater(Chvátal and Slater, 1993), e Sankaranarayana e Stewart(Sankaranarayana and Stewart, 1992) provaram que a propriedade de não ser bem-coberto é NP-completo.

Caro, Seb e Tarsi(Caro, Sebo, and Tarsi, 1996) mostraram que mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos continua Co-NP-completo.

Staples(Staples, 1975; Staples, 1979) define um grafo G como sendo **1-bem-coberto** se ele for bem-coberto e para qualquer $v \in V(G)$, o grafo $G \backslash v$ também for bem-coberto. Pinter(Pinter, 1991; Pinter, 1994) define um grafo G como sendo **fortemente bem-coberto** se ele for bem-coberto e $G \backslash e$ também for bem coberto, para qualquer $e \in E(G)$.

Finbow e Hartnell(Finbow and Hartnell, 1995) definem um grafo de **paridade** G como sendo um grafo G em que todos conjuntos independentes maximais de vértices em G têm a mesma paridade. De uma maneira geral, um grafo G é dito ser **Z_m-bem-coberto** se $|I| \equiv |J|$ (mod m), $\forall I, J$ conjuntos independentes maximais de vértices em G. Portanto grafos Z_m-bem-cobertos são uma extensão natural da classe dos grafos bem-cobertos.

Definimos grafos **1-Z_m-bem-cobertos** como sendo grafos Z_m-bem-cobertos G, tais que $G\backslash v$ é também Z_m-bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Um grafo G é fortemente Z_m-bem-coberto se ele for Z_m-bem-coberto e $G\backslash e$ for também Z_m-bem-coberto, $\forall e \in E(G)$.

Uma **clique** em um grafo G é um subgrafo completo maximal de G.

Um vértice v de um grafo é dito ser **simplicial** se o grafo gerado por $N[v]$ for uma clique.

Uma clique de um grafo G tendo pelo menos um vértice simplicial é denominado um **simplex** do grafo.

Um grafo G é um grafo **simplicial** se todo vértice de G for simplicial or for adjacente a um vértice simplicial.

Um grafo G é **cordal** se todo ciclo de comprimento maior ou igual a 4 tiver uma corda.

Para algumas classes de grafos foram obtidas caracterizações que permitem o reconhecimento de grafos bem-cobertos em tempo polinomial. Passamos a descrever agora algumas dessas caracterizações.

A primeira caracterização para grafos bipartidos foi obtida por Ravindra(Ravindra, 1977). Sejam G um grafo bipartido, $xy = e \in E(G)$, e G_e o grafo induzido por $N(x) \cup N(y)$.

TEOREMA 1. *G é bem-coberto se e somente se G contém emparelhamento perfeito F tal que $\forall e \in F$, G_e é um grafo bipartido completo.*

Observamos que a caracterização acima não conduz a algoritmo polinomial, pois teríamos que encontrar todos os emparelhamentos perfeitos do grafo.

Favaron(Favaron, 1982) caracterizou grafos **muito bem-cobertos**, isto é, grafos bem-cobertos onde $\alpha(G) = |V|\backslash 2$.

Suponhamos que um grafo G tenha um emparelhamento perfeito F. Dizemos que o emparelhamento $F = \{a_1b_1, ..., a_nb_n\}$ **satisfaz a propriedade** P se:

(a) $\forall a_ib_i \in F$, $\nexists w \in V(G)$ tal que $w \sim a_i$ e $w \sim b_i$.

(b) $\forall a_ib_i \in F$, não existe conjunto independente de dois vértices $\{u, v\} \subseteq V(G)$ que satisfaça $u \sim a_i$ e $v \sim b_i$.

TEOREMA 2. *Para qualquer grafo G as seguintes condições são equivalentes:*

i) G é muito bem-coberto.

ii) Existe um emparelhamento perfeito em G que satisfaz P.

iii) G contém pelo menos um emparelhamento perfeito em G e todo emparelhamento perfeito de G satisfaz P.

Por exemplo, no grafo da figura 1, $F = \{(1,4); (2,3); (5,6)\}$ satisfaz a condição (ii) do teorema, portanto G é bem-coberto.

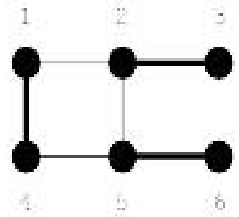

Figura 1. Exemplo de um grafo bipartido bem-coberto

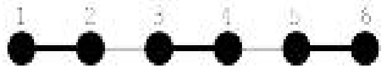

Figura 2. Exemplo de um grafo bipartido com emparelhamento perfeito que não satisfaz P

Já para o grafo da figura 2, $F = \{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ é um emparelhamento perfeito que não satisfaz a condição b) da propriedade P. De fato, $\{2,5\}$ é um conjunto independente tal que $2 \sim 3$ e $5 \sim 4$, e $\{3,4\} \in F$. Portanto este grafo não é bem-coberto.

O teorema acima fornece um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos bipartidos bem-cobertos.

Um resultado bastante útil para mostrar que um grafo não é bem-coberto foi provado em(Campbell and Plummer, 1988):

TEOREMA 3. *Seja G um grafo. Se G for bem-coberto, então $G \backslash N[S]$ é bem-coberto, $\forall S$, onde S é um conjunto independente em $V(G)$.*

Como aplicação deste resultado, mostraremos que C_n não é bem-coberto para $n \geq 8$. Sejam $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ os vértices de um ciclo como mostrado na figura 3. Então, se $n \geq 8$, o conjunto $\{1,7\}$ é independente e $G \backslash N[S]$ contém o $P_3 = \{3,4,5\}$ que não é bem-coberto, portanto C_n não é bem-coberto para $n \geq 8$.

A **cintura** de um grafo G é definido como sendo o comprimento do menor ciclo do grafo.

Uma aresta **pendente** em um grafo G é uma aresta possuindo um vértice de grau 1 em uma das extremidades.

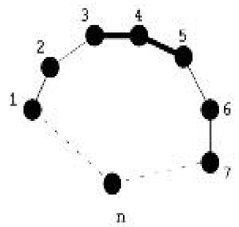

Figura 3. O ciclo C_n

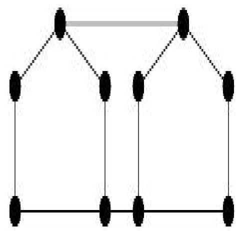

Figura 4. Exemplo de um grafo com dois ciclos básicos

Finbow, Hartnell(Finbow and Hartnell, 1983) estudaram grafos bem-cobertos conforme a cintura do grafo.

TEOREMA 4. *Seja G um grafo com cintura pelo menos 8. Então G é bem-coberto, se e somente se, suas arestas pendentes formarem um emparelhamento perfeito em G.*

Posteriormente, os mesmos autores juntamente com Nowakowski conseguem caracterizar grafos com cintura maior ou igual a 5 bem-cobertos(Finbow, Hartnell, and Nowakowski, 1993).

DEFINIÇÃO 1. *Um ciclo C_5 de um grafo é dito* **básico** *se C_5 não contiver dois vértices adjacentes de grau maior ou igual a 3. Denotaremos estes ciclos por CC_5.*

DEFINIÇÃO 2. *Em um grafo G, sejam $C(G) = \{v \in V(G) : v \in CC_5\}$, $P(G) = \{v \in V(G) : v$ é incidente a uma aresta pendente de $G\}$. Dizemos que G pertence a classe PC se $V(G) = P(G) \cup C(G)$, com $P(G) \cap C(G) = \emptyset$, o subgrafo induzido por $P(G)$ for um emparelhamento.*

TEOREMA 5. *Seja G um grafo com cintura pelo menos 5. Então G é bem-coberto, se e somente se, G pertencer a classe PC ou G for K_1, C_7 ou um dos quatro grafos mostrados na figura 5.*

Finbow, Hartnell e Nowakowski(Finbow, Hartnell, and Nowakowski, 1994) caracterizaram grafos que possam ter C_3, mas sem C_4 e C_5, bem-cobertos:

TEOREMA 6. *G é um grafo bem-coberto não contendo C_4 e C_5, se e somente se, G for C_7, o grafo da figura 6 ou for um grafo simplicial, em que cada vértice pertence a apenas um simplex com 2 ou 3 vértices.*

Grafos livres de $K_{1,3}$ bem-cobertos com algumas propriedades adicionais (4-conexos e 4-regulares, ou 4-conexos e planares), foram caracterizados por Hartnell e Plummer(Hartnell and Plummer, 1996) no teorema abaixo:

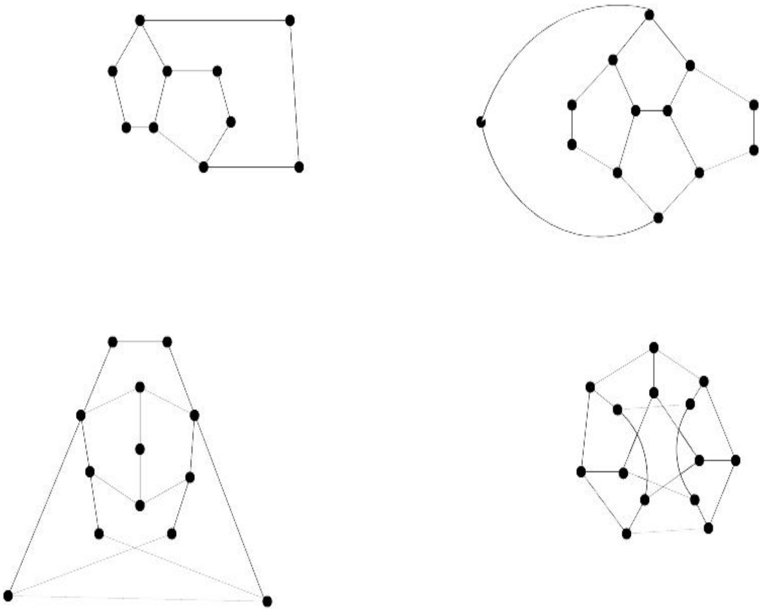

Figura 5. Grafos com cintura ≥ 5 bem-cobertos

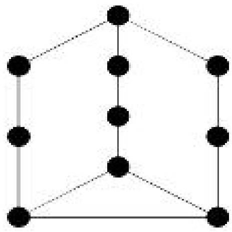

Figura 6. Grafo sem C_4 e C_5 bem-coberto

TEOREMA 7. *Existem exatamente 5 grafos 4-conexos, livres de $K_{1,3}$ e planares bem-cobertos. Eles são os grafos mostrados na figura 7.*

Tankus e Tarsi(Tankus and Tarsi, 1996) mostraram que grafos livres de $K_{1,3}$ bem-cobertos podem ser reconhecidos em tempo polinomial. A idéia deles foi utilizar o método desenvolvido por Lovász e Plummer(Lovász and Plummer, 1986) para reduzir um grafo G a um grafo $G^* = L(H)$, daí encontrar o grafo H, verificar em seguida se ele é equiemparelhável usando o resultado de Lesk, Plummer, Pulleyblank(Lesk, Plummer, and Pulleyblank, 1984).

Um grafo **cúbico** é um grafo em que todos os seus vértices têm grau 3.

Grafos 3-conexos, cúbicos e planares bem-cobertos foram caracterizados por Campbell(Campbell, 1987) e Campbell e Plummer(Campbell and Plummer, 1988). Eles mostraram que existem apenas 4 grafos satisfazendo estas condições. Posteriormente Ellingham, Campbell e Royle(?) caracterizaram grafos

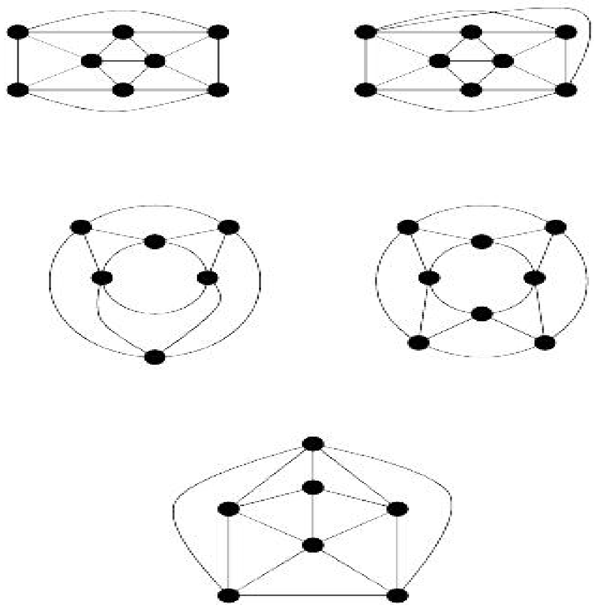

Figura 7. Grafos 4-conexos, livres de $K_{1,3}$, planares e bem-cobertos

cúbicos bem-cobertos em geral. Grafos com grau máximo igual a 3 bem-cobertos foram caracterizados por Ramey(J.E. Ramey, 1994).

Algumas subclasses de grafos cordais (grafos de intervalo, grafos bloco, etc) foram caracterizadas em(Topp and Volkmann, 1990). Posteriormente, uma caracterização geral, para grafos cordais bem-cobertos foi obtida em(Prisner, Topp, and Vestergaard, 1996). Uma questão natural seria saber se grafos perfeitos bem-cobertos podem ser reconhecidos em tempo polinomial. Um grafo G é fracamente cordal se todo ciclo de comprimento maior que 4 em G e $\overline{G}$ tiver uma corda. Hayward(Hayward, 1985) mostrou que os grafos fracamente cordais são perfeitos. Sankaranarayana(Sankaranarayana, 1994), provou que o reconhecimento de grafos bem-cobertos perfeitos é Co-NP-completo. Para provar isto, ele mostrou que o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos é Co-NP-completo para a classe dos grafos fracamente cordais.

Finbow, Hartnell e Whitehead(Finbow, Hartnell, and Whitehead, 1995) caracterizaram grafos de cintura maior ou igual a 8 com exatamente 2 tamanhos de conjuntos independentes maximais, esta classe de grafos foi definida por $M(2)$. Em geral, a classe $M(t)$ é a classe dos grafos tendo t tamanhos distintos de conjuntos independentes maximais. Caro(Caro, 1988) mostrou que o reconhecimento de grafos na classe $M(t)$, mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ é Co-NP-completo.

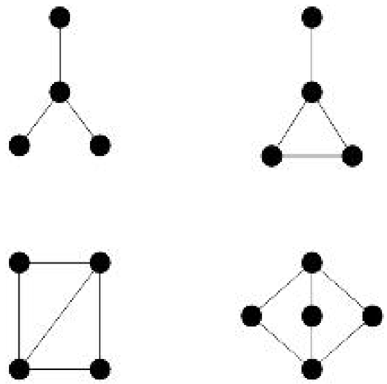

Figura 8. Grafos minimalmente não bem-cobertos

2. Grafos quase Z_m-bem-cobertos

2.1. Introdução

Iniciamos este capítulo com algumas propriedades básicas sobre grafos minimalmente não bem-cobertos. Estes resultados estão provados em (Caro, Ellingham, and Ramey, 1998; J.E. Ramey, 1994). Em seguida, definimos e caracterizamos grafos quase Z_m-bem-cobertos.

DEFINIÇÃO 3. (J.E. Ramey, 1994) *Um grafo G é* **minimalmente não bem-coberto** *se G não for bem coberto mas $G \backslash N[v]$ for bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

TEOREMA 8. (J.E. Ramey, 1994) *Seja G um grafo minimalmente não bem-coberto com grau máximo Δ, então G contém no máximo $2\Delta - 1$ vértices.*

COROLÁRIO 1. *O conjunto dos grafos com grau máximo Δ contém um número finito de grafos minimalmente não bem-cobertos.*

Ramey(J.E. Ramey, 1994) mostra que existem apenas 4 grafos minimalmente não bem-cobertos com $\Delta = 3$. São os grafos ilustrados na figura 8.

Existem 14 com $\Delta = 4$ e 43 com $\Delta = 5$.

TEOREMA 9. (J.E. Ramey, 1994) *Seja Δ fixo. Para o conjunto dos grafos com grau máximo Δ, existe um algoritmo linear para determinar se um grafo é bem-coberto.*

Embora o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos seja Co-NP-completo, podemos reconhecer grafos bem-cobertos com grau máximo limitado em tempo linear.

2.2. Grafos de quase paridade

Introduzimos um conceito similar a minimalmente não bem coberto e 1-bem-coberto.

DEFINIÇÃO 4. *Um grafo G é um grafo* **quase bem-coberto** *se ele não for bem-coberto, mas $G\backslash\{v\}$ é bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

DEFINIÇÃO 5. *Um grafo G é um* **grafo de quase paridade** *se G não for um grafo de paridade mas $G\backslash\{v\}$ for um grafo de paridade.*

Daremos aqui uma caracterização completa dos grafos de quase paridade e mostraremos que $K_{1,2}$ é o único grafo quase bem-coberto.

Inicialmente mostraremos que um grafo de quase paridade deve ser bipartido. O teorema 10 fornece uma caracterização completa dos grafos nesta família.

LEMA 1. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*

Sejam G um grafo de quase paridade e I_1 e I_2 dois conjuntos independentes maximais de G de diferentes paridades. Então:

1) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, e

2) $G = I_1 \cup I_2$.

TEOREMA 10. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*) G é um grafo de quase paridade se e somente se $G = K_{r,s}$, com $r \equiv s + 1$ (mod 2).*

COROLÁRIO 2. *O grafo $G = K_{1,2}$ é o único grafo quase bem-coberto.*

DEFINIÇÃO 6. *Um grafo H é* **quase Z_m-bem-coberto** *se ele não for Z_m-bem-coberto mas $H\backslash\{x\}$ for Z_m-bem-coberto para todo $x \in V(H)$.*

TEOREMA 11. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*

Os grafos da forma $K_{1,lm+2}$, para $l = 0, 1, 2, ...$ são os únicos grafos quase Z_m-bem-cobertos, para m≥ 3.

3. Grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares Z_m-bem-cobertos

3.1. Introdução

Caro, Seb e Tarsi(Caro, Sebo, and Tarsi, 1996), mostraram que o reconhecimento de grafos bem-cobertos é Co-NP-completo mesmo para grafos que são livres de $K_{1,4}$, uma pergunta natural é saber a natureza desse problema para grafos livres de $K_{1,3}$.

Tankus e Tarsi(Tankus and Tarsi, 1996) provaram recentemente que o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos é polinomial para a classe dos grafos livres de $K_{1,3}$.

Mostramos em (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 1998) que se um grafo livre de $K_{1,3}$ for Z_m-bem-coberto, então ele deve ser bem-coberto.

Em (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 2001) mostramos uma condição suficiente para que um grafo dado seja Z_m-bem-coberto. Esta condição não é necessária, em geral, para que um grafo seja Z_m-bem-coberto. Provamos (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 2001), porém, que para grafos simpliciais ela é necessária. Em seguida mostramos que um grafo cordal Z_m-bem-coberto, deve necessariamente ser simplicial. Apresentamos também uma caracterização para grafos arco-circulares Z_m-bem-cobertos.

Inicialmente faremos uma breve descrição da idéia de Tankus e Tarsi.

TEOREMA 12. *Existe um algoritmo polinomial para decidir se um dado grafo é equiemparelhável.*

Um emparelhamento em um grafo G pode ser visto como um conjunto independente de vértices em um grafo-linha. Portanto, dado um grafo H, se existir um grafo G tal que $H \simeq L(G)$, então:

PROPOSIÇÃO 1. *H é bem coberto se e somente se G for equiemparelhável.*

O problema é que nem sempre existe um grafo G nestas condições. Um dos subgrafos proibidos para que isto ocorra é exatamente o grafo $K_{1,3}$, isto é, se H contiver $K_{1,3}$ como subgrafo induzido, então ele não é grafo linha de nenhum grafo.

Lovaśz e Plummer(Lovász and Plummer, 1986) apresentam um algoritmo para construir um conjunto independente máximo de vértices de um grafo livre de $K_{1,3}$ G. O algoritmo deles é baseado na seguinte idéia:

1) G é transformado em um grafo G^*, o qual é o grafo linha de um grafo H.

2) O grafo H é construído e um conjunto independente máximo de G^* é encontrado por um algoritmo de emparelhamento máximo aplicado a H.

A maneira como G^* é obtido de G permite estabelecer a forma como o tamanho de um conjunto independente máximo é alterado de G para G^*. Desta forma, uma vez que um conjunto independente máximo de G^* é encontrado, ele pode ser estendido a um conjunto independente máximo de G.

O problema agora é garantir que G^* é bem-coberto se e somente se G for bem-coberto, e daí aplicar o algoritmo em H para decidir se um dado grafo é equiemparelhável.

Tankus e Tarsi(Tankus and Tarsi, 1996) mostram que G^* é o último termo de uma sequência $\{G_0 = G, G_1, ..., G^*\}$ de grafos livres de $K_{1,3}$, cada um obtido de seu predecessor, até que um grafo linha G^* é obtido, e além disso, se G_i for bem-coberto G_{i+1} será bem-coberto. Eles desenvolvem um algoritmo polinomial para checar o grafo G_i e retornar alguma das seguintes condições:

1) G_i não é bem-coberto, ou

2) G_i é bem coberto se e somente se G_{i+1} é bem-coberto.

Este procedimento é executado antes de cada passo da construção. Se ocorrer 1 sempre, então concluímos que G não é bem-coberto. Caso contrário, o grafo G^* é testado como descrito acima. Dessa maneira, eles conseguem provar o seguinte resultado:

TEOREMA 13. (Tankus and Tarsi, 1996) *Existe um algoritmo polinomial para decidir se um grafo livre de $K_{1,3}$ é bem-coberto.*

3.2. Grafos livres de $K_{1,3}$ de paridade

Provamos (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 1998), que os grafos bem-cobertos são os únicos grafos livres de $K_{1,3}$ de paridade.

TEOREMA 14. (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 1998) *Se G for um grafo livre de $K_{1,3}$ de paridade, então G é bem-coberto.*

Utilizando as mesmas idéias do teorema acima, provamos o seguinte resultado geral:

TEOREMA 15. (Barbosa, 1999; Barbosa and Hartnell, 1998) *Se G for um grafo livre de $K_{1,3}$ Z_m-bem-coberto, então G é bem-coberto.*

Neste ponto, podemos verificar que dado um grafo G, livre de $K_{1,r}$ e Z_2-bem-coberto, o problema de decidir se ele é bem-coberto é Co-NP-completo para $r > 6$, conforme o resultado de Caro(Caro, 1988) e polinomial para $r < 4$, porém não se sabe a natureza deste problema para $3 < r < 7$.

Concluímos observando que o resultado acima não é verdadeiro para grafos livres de $K_{1,r}$, para $r > 3$, pois $K_{1,3}$ é um grafo de paridade e não é bem-coberto.

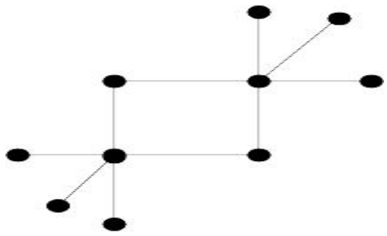

Figura 9. Um grafo Z_2-bem-coberto tendo vértices que não pertencem a nenhum simplex.

3.3. Grafos simpliciais, cordais e arco-circulares Z_m-bem-cobertos

DEFINIÇÃO 7. *Um grafo G é um* **grafo arco circular** *se ele for o grafo intersecção de arcos em um círculo.*

Em(Prisner, Topp, and Vestergaard, 1996) é dado uma caracterização de grafos cordais, simpliciais e arco circulares bem-cobertos. Daremos aqui uma caracterização de grafos Z_m-bem-cobertos para aquelas classes de grafos.

Mostramos uma condição suficiente para que um grafo seja Z_m-bem-coberto.

TEOREMA 16. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 2001*) Seja G um grafo qualquer. Se para cada $g \in V(G)$, $\exists l \in N$, tal que g pertence a exatamente $(ml + 1)$ simplexos, então G é Z_m-bem-coberto.*

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. Por exemplo, o grafo da figura 9 é um grafo Z_2-bem-coberto no qual existem dois vértices que não pertencem a nenhum simplex.

Porém se o grafo for simplicial então a recíproca do teorema 16 é verdadeira.

TEOREMA 17. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 2001*) Se G é um grafo Z_m-bem-coberto e simplicial, então para cada vértice $g \in V(G)$, $\exists l \in N$ tal que g pertence a exatamente $(ml + 1)$ simplexos.*

Nos teoremas que seguem, usaremos o lema abaixo que é provado em(Caro and Hartnell, 2000).

LEMA 2. *Se G é um grafo Z_m-bem-coberto então $G \backslash N[v]$ e $G \backslash N[S]$ também são Z_m-bem-cobertos, $\forall v \in V(G)$ e qualquer conjunto independente S de G.*

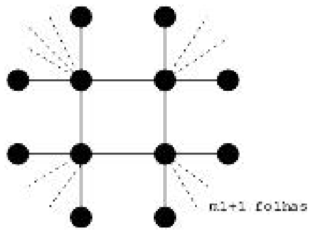

Figura 10. Grafo arco-circular Z_m-bem-coberto.

TEOREMA 18. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 2001*) Se G é cordal e Z_m-bem-coberto então G é simplicial.*

Como observado em(Prisner, Topp, and Vestergaard, 1996) se G for um grafo arco circular, $G \backslash N[v]$ é um grafo de intervalo para qualquer $v \in V(G)$. Podemos facilmente observar que o grafo bipartido completo $K_{2,3}$ não é subgrafo induzido de nenhum grafo arco circular. Agora, daremos também uma caracterização de grafos arco circulares Z_m-bem-cobertos.

TEOREMA 19. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 2001*) Seja G um grafo arco circular que não seja completo. $G \backslash N[v]$ é um grafo Z_m-bem-coberto, $\forall v \in V(G)$ se e somente se G é Z_m-bem-coberto.*

O grafo da figura 10 é um exemplo de grafo arco-circular Z_m-bem-coberto.

4. As classes de grafos $M(t)$ e $I(t)$

4.1. Introdução

DEFINIÇÃO 8. *Um grafo G pertence classe $M(t)$ se G tem exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais.*

Caro(Caro, 1988) mostrou que o reconhecimento de grafos na classe $M(t)$ é Co-NP-completo. Finbow, Hartnell e Whitehead(Finbow, Hartnell, and Whitehead, 1995) deram uma caracterização de grafos com cintura ≥ 8 pertencentes classe $M(2)$.

Nesta seção definiremos a classe de grafos $I(t)$ como sendo a classe de grafos em $M(t)$ onde os tamanhos dos conjuntos independentes maximais são números consecutivos.

Dado um grafo $G \in M(t)$ não se sabe a natureza do problema de decidir se G pertence a $I(t)$, porém, mostraremos que para grafos livres de $K_{1,3}$ $M(t) = I(t)$.

Daremos também uma caracterização completa de grafos simpliciais em $M(2)$ e uma condição suficiente para que um grafo cordal conexo pertença a $I(2)$.

Encerramos a seção aplicando alguns dos resultados para grafos t-emparelháveis.

4.2. A classe $I(t)$

DEFINIÇÃO 9. *Um grafo G pertence a classe $I(t)$ se G tem exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais com tamanhos $r, r+1, ..., r+(t-1)$, para algum $r \in N$.*

Inicialmente, mostraremos que para qualquer $t \in N$, a classe $I(t)$ não é vazia.

PROPOSIÇÃO 2. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*
Para qualquer $t \in N$, $I(t) \neq \emptyset$.

Por exemplo, seja $G = K_{1,t-1}$, $\alpha(G) = t-1$.

A construção acima também estabelece o seguinte resultado:

COROLÁRIO 3. *Um grafo G pertencente a $I(t)$ não tem subgrafos proibidos.*

Agora, daremos também uma condição suficiente para um grafo não pertencer a $I(t)$.

PROPOSIÇÃO 3. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*
Se um grafo G tiver um vértice com 3 ou mais folhas adjacentes, então G não pode pertencer a $I(t)$.

TEOREMA 20. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*
Se G for livre de $K_{1,3}$, e $G \in M(t)$, então $G \in I(t)$.

O resultado não é verdadeiro se trocarmos a condição de ser livre de $K_{1,3}$ por livre de $K_{1,4}$. Por exemplo, $K_{1,3}$ é um grafo livre de $K_{1,4}$, pertencente a $M(2) \backslash I(2)$.

4.3. Grafos simpliciais em $M(2)$

Daremos agora uma caracterização completa dos grafos simpliciais em $M(2)$.

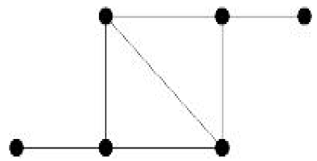

Figura 11. Um grafo cordal em M(2)

TEOREMA 21. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*
Um grafo simplicial G pertence a $M(2)$ se e somente se os vértices de G puderem ser particionados em dois conjuntos não vazios A e Q tais que os vértices de A pertencem a exatamente um simplex e aqueles em Q a exatamente $k > 1$ simplexos, onde os vértices de Q formam uma clique.

Não podemos retirar a condição no teorema anterior que o grafo seja simplicial. Também não podemos substituir simplicial por cordal, como mostrado na figura 11.

COROLÁRIO 4. *Um grafo simplicial G pertence a $I(2)$ se e somente se os vértices de G puderem ser particionados em dois conjuntos não vazios A e Q tais que os vértices em A pertençam a exatamente um simplex e aqueles em Q a exatamente $k = 2$ simplexos, onde os vértices de Q formam uma clique.*

TEOREMA 22. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa and Hartnell, 1998*)*
Seja G um grafo cordal conexo. Se g pertencer a exatamente um simplex, $\forall g \in V(G) \backslash Q$, tal que Q é uma clique na qual todo vértice de Q não pertence a nenhum simplex, então $G \in I(2)$.

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. $K_{1,2}$ pertence a $I(2)$, mas ele tem um vértice pertencente a dois simplexos.

PROBLEMA 1. *Como são os grafos livres de $K_{1,3}$ em $I(t)$?*

4.4. Grafos t-emparelháveis

DEFINIÇÃO 10. *Um grafo G é t-**emparelhável** se G tiver exatamente t tamanhos diferentes de emparelhamentos maximais. Dizemos que G pertence à classe $E(t)$.*

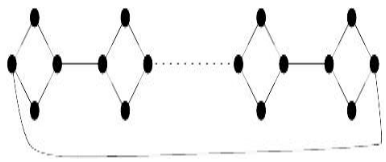

Figura 12. Um grafo em E(t)

Inicialmente, mostraremos que se $G \in E(t)$, então todos os emparelhamentos devem ter tamanhos em uma sequência consecutiva, isto é similar à definição da classe $I(t)$. Para o caso de emparelhamentos não pode ocorrer algo semelhante a classe $M(t)$ estudada neste capítulo. Este resultado pode ser mostrado usando o teorema de Berge para caminhos aumentantes. A demonstração que faremos é uma aplicação dos resultados de 5.2. Em seguida daremos uma maneira de, dado qualquer $t \in N$, construir um grafo em $E(t)$.

Utilizando o teorema 20, provamos o seguinte resultado:

TEOREMA 23. *(*Barbosa, 1999*)*
Se G tiver emparelhamentos maximais de tamanhos t e t+i, ele deve possuir emparelhamentos maximais de tamanho t', $\forall t'$, $t < t' < t + i$.

Com base no teorema acima, a primeira idéia para tentar decidir se um grafo $G \in E(t)$, seria encontrar um emparelhamento máximo em G, o que é fácil, e depois encontrar um emparelhamento maximal mínimo, o que é, em geral difícil. Este problema é NP-completo para grafos bipartidos, cúbicos e planares(Yannakakis and Gavril, 1989). A única classe de grafos para a qual se conhece algoritmo polinomial para encontrar o tamanho do emparelhamento maximal mínimo é a classe das árvores(Yannakakis and Gavril, 1989).

TEOREMA 24. *(*Barbosa, 1999*)*
Para $\forall t \in N$, existe um grafo planar $G \in E(t)$.

Demonstração:

Mostraremos que o grafo abaixo pertence a $E(t + 1)$, onde t é o número de C_4's no grafo abaixo:

O emparelhamento de menor tamanho é obtido tomando-se as arestas que não estejam nos C_4. De fato, se retirarmos qualquer aresta deste emparelhamento, poderemos incluir outras 2 (uma de cada C_4, vizinho a esta aresta) e teríamos um emparelhamento maior. Este menor emparelhamento tem tamanho t.

O grafo tem um emparelhamento perfeito de tamanho $2t$.

Portanto, usando o teorema anterior, $G \in E(t + 1)$.

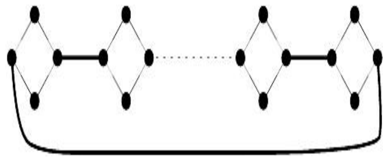

Figura 13. Emparelhamento maximal de menor tamanho

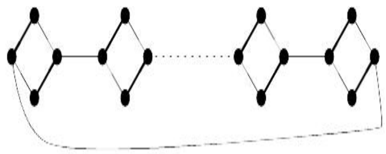

Figura 14. Emparelhamento perfeito

5. Grafos 1-Z_m-bem-cobertos e grafos fortemente Z_m-bem-cobertos

5.1. Introdução

DEFINIÇÃO 11. *Um grafo G é* **1-Z_m-bem-coberto** *quando ele for Z_m-bem-coberto e $G\backslash v$ for também Z_m-bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

DEFINIÇÃO 12. *Um grafo G é* **fortemente Z_m-bem-coberto** *quando ele for Z_m-bem-coberto e $G\backslash e$ for também Z_m-bem-coberto, $\forall e \in E(G)$.*

Neste capítulo mostraremos alguns resultados sobre estas duas classes de grafos. Dentre outros resultados, provaremos uma condição suficiente para que um grafo seja 1-Z_m-bem-coberto. Mostraremos que esta condição também será necessária para que grafos cordais sejam 1-Z_m-bem-cobertos. Caracterizaremos os grafos cordais e simpliciais fortemente Z_m-bem-cobertos. Caracterizaremos os grafos que são simultaneamente fortemente Z_m-bem-cobertos e 1-Z_m-bem-cobertos. Finalmente mostraremos que grafos 1-Z_m-bem-cobertos possuem grau mínimo pelo menos 2.

5.2. Resultados

LEMA 3. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*)*
Se G é Z_m-bem-coberto, então $\alpha(G) \equiv \alpha(G\backslash N[v]) + 1$ (mod m), $\forall v \in V(G)$.

TEOREMA 25. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*)*
Se G for um grafo 1-Z_m-bem-coberto, então $G\backslash N[v]$ é 1-Z_m-bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.

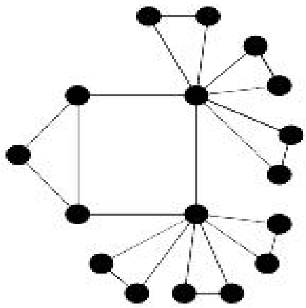

Figura 15. Um grafo simplicial 1-Z_2-bem-coberto

TEOREMA 26. (Barbosa, 1999; Barbosa, 2000)
Se G é um grafo fortemente Z_m-bem-coberto, então $G \backslash N[v]$ é fortemente Z_m-bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.

Agora, daremos uma condição suficiente para um grafo ser 1-Z_m-bem- coberto.

TEOREMA 27. (Barbosa, 1999; Barbosa, 2000)
Dado um grafo G, se todo vértice de G pertencer a exatamente $ml + 1$ simplexos e cada simplex tiver mais de um vértice simplicial, então G é um grafo 1-Z_m-bem-coberto.

Esta condição não é necessária para grafos em geral, como mostrado no exemplo da figura 15. Para grafos cordais esta condição é também necessária.

TEOREMA 28. (Barbosa, 1999; Barbosa, 2000)
Se G for um grafo cordal 1-Z_m-bem-coberto, então todo vértice de G deve pertencer a exatamente $ml+1$ simplexos e cada simplex tem mais de um vértice simplicial.

COROLÁRIO 5. *K_1 e K_2 são as únicas árvores (conexas) 1-Z_m-bem-cobertas.*

Provaremos depois, Teorema 32, um resultado mais geral, isto é, mostraremos que não existem vértices de grau 1 em todo grafo 1-Z_m-bem-coberto com pelo menos 3 vértices.

LEMA 4. (Barbosa, 1999; Barbosa, 2000) *Seja G um grafo cordal e s_1 um vértice simplicial de G. Então $G \backslash (s_1, g)$ é também cordal, $\forall g$ adjacente a s_1.*

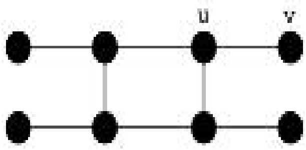

Figura 16. Um grafo simplicial

O resultado acima não é válido para grafos simpliciais, como mostrado na figura 16

.

PROPOSIÇÃO 4. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*) K_1 e K_2 são os únicos grafos cordais conexos fortemente Z_m-bem-cobertos.*

PROPOSIÇÃO 5. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*) K_1 e K_2 são os únicos grafos conexos simpliciais fortemente Z_m-bem-cobertos.*

LEMA 5. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*) Se G, $G \neq K_2$, for um grafo Z_m-bem-coberto e e uma aresta crítica em G, então $G \backslash e$ não é Z_m-bem-coberto.*

Staples(Staples, 1975) provou o seguinte resultado:

TEOREMA 29. *Se G for um grafo bem-coberto e $u \in V(G)$ é tal que $G \backslash u$ é também bem-coberto, então existe um vértice v adjacente a u tal que (u, v) é uma aresta crítica.*

Este resultado não é válido, em geral, para grafos Z_m-bem-cobertos. O grafo da figura 17 é um grafo de paridade no qual $G \backslash u$ é também de paridade. Observe que $\alpha(G) = \alpha(G \backslash (u, v))$, $\forall v \in N(u)$, mas não existe aresta crítica e em G tal que e seja incidente a u.

DEFINIÇÃO 13. *Dado um grafo G, uma aresta e em G é dita ser* **m-crítica** *se existir um conjunto independente maximal de vértices em $G \backslash e$ tal que $|I| \not\equiv \alpha(G)$ (mod m).*

Observe que toda aresta crítica é uma aresta m-crítica. Podemos provar agora o seguinte resultado:

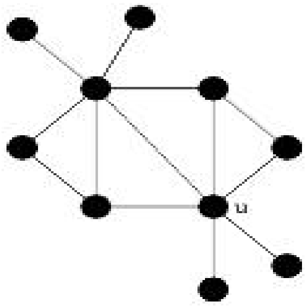

Figura 17. Um grafo G com uma aresta m-crítica

TEOREMA 30. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*)*
Se G for um grafo Z_m-bem-coberto e $u \in V(G)$ for tal que é também Z_m-bem-coberto, então existe um vértice v adjacente a u tal que (u, v) é uma aresta m-crítica.

LEMA 6. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*) Se G, $G \neq K_2$, for um grafo Z_m-bem-coberto e e for uma aresta crítica, então $G \backslash e$ não é Z_m-bem-coberto.*

TEOREMA 31. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*)*
K_1 e K_2 são os únicos grafos conexos que são fortemente Z_m-bem-cobertos e 1-Z_m-bem-cobertos.

TEOREMA 32. *(*Barbosa, 1999*;* Barbosa, 2000*)*
Se G for um grafo 1-Z_m-bem-coberto, então $\delta \geq 2$.

Pinter(Pinter, 1991) caracterizou grafos planares fortemente bem-cobertos com o seguinte teorema:

TEOREMA 33. *Os únicos grafos planares fortemente bem-cobertos são K_1, K_2, C_4 e o octaedro (ver figura 18).*

Isto não é verdade para grafos fortemente Z_2-bem-cobertos, como mostra a figura 19.

Na próxima seção mostraremos uma maneira de, para qualquer m dado, construir infinitos grafos planares fortemente Z_m-bem-cobertos.

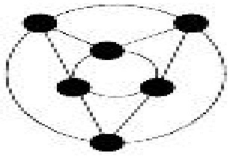

Figura 18. O octaedro

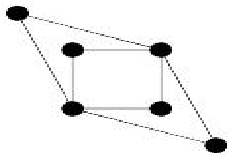

Figura 19. Um grafo planar fortemente Z_2-bem-coberto

6. Produtos de grafos Z_m-bem-cobertos e construção de grafos fortemente Z_m-bem-cobertos

6.1. Introdução

No que segue, necessitaremos da caracterização de Caro e Hartnell(Caro and Hartnell, 2000) de grafos com cintura > 5 Z_m-bem-cobertos.

Dizemos que os vértices x e y em G são conectados por uma 2-ponte se existirem vértices u e v em $V(G)$ tais que grau(u)=grau(v)=2, $N(u) = \{x, v\}$ e $N(v) = \{u, y\}$.

TEOREMA 34. *(*Caro and Hartnell, 2000*) Seja G um grafo conexo de cintura > 5. Então G é Z_m-bem-coberto se e somente se $G = K_1, C_7$, ou G consiste de uma união finita de arbustos, cada um com talo x_i, onde cada talo tem $r_i m + 1$ folhas, e onde para cada i e j, uma e apenas uma das seguintes condições ocorre:*

1) x_i e x_j são unidos por uma aresta, e qualquer outro caminho, caso exista, unindo x_i e x_j deve incluir, pelo menos, um talo diferente de x_i e x_j.

2) x_i e x_j são conectados a km 2-pontes e qualquer outro caminho unindo x_i e x_j deve incluir uma outra talo além de x_i e x_j.

3) Todo caminho unindo x_i e x_j contém, pelo menos, um talo além de x_i e x_j.

Um exemplo de um grafo Z_3-bem-coberto com cintura 6 é o grafo da figura 20.

Pinter(Pinter, 1991) mostrou uma série de resultados para grafos fortemente bem-cobertos, que não são válidos para grafos fortemente Z_m-bem-cobertos. Ele mostrou que grafos fortemente bem-cobertos têm grau mínimo≥ 4. Isto não é válido, em geral, para grafos fortemente Z_m-bem-cobertos, conforme

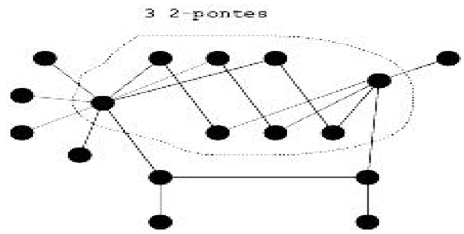

Figura 20. Um grafo Z_3-bem-coberto com cintura 6

mostrado na figura 22. Ele também provou que para grafos fortemente bem-cobertos vale a seguinte desigualdade: $gr(v) \leq |V(G)| - 2\alpha(G) + 2$, $\forall v \in V(G)$. O mesmo exemplo citado acima mostra que isto não vale para grafos fortemente Z_m-bem-cobertos.

6.2. Produto lexicográfico

DEFINIÇÃO 14. *Dado um grafo H e uma família $\{G_1, G_2, ..., G_{|V(H)|}\}$ de grafos não vazios indexados pelos vértices de H, o* **produto lexicográfico** *$Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$ de G e $\{G_1, G_2, ..., G_{|V(H)|}\}$ é o grafo tendo como vértices o conjunto $\cup_{v \in V(H)} \{[v, u] : u \in V(G_v)\} = \cup_{v \in V(H)} \{v\} \times V(G_v)$, e dois vértices $[v_1, v_2]$ e $[u_1, u_2]$ são adjacentes quando a aresta [$[v_1, u_1] \in E(H)$] ou [$v_1 = u_1$ e $[v_2, u_2] \in E(G_{v_i})$].*

Observe que estamos usando a notação $[u, v]$ para vértices em GoH, isto para não confundir com a notação (u, v) para a aresta ligando os vértices u e v.

DEFINIÇÃO 15. *Dado $S \subset V(Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$, definimos $X_H(S) = \{x \in V(H) : \exists y \in V(G_x) com [x, y] \in S\}$ e $X_{G_x}(S) = \{y \in V(G_x) : [x, y] \in S\}$, $\forall x \in X_H(S)$.*

Topp e Volkmann(Topp and Volkmann, 1992) provaram o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 6. *Dado $S \subset V(Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$, S é um conjunto independente maximal em $Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$ se e somente se $X_H(S)$ for um conjunto independente maximal em H, e para todo $v \in X_H(S)$, o conjunto $X_{G_v(S)}$ for um conjunto independente maximal em G_v.*

Se H for um grafo Z_m-bem-coberto e G for Z_n-bem-coberto, nem sempre é verdade que HoG seja Z_n-bem-coberto.

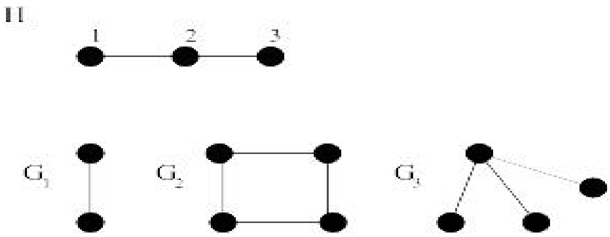

Figura 21. Ho$\{G_i\}$ é Z_3-bem-coberto

H não precisa ser necessariamente Z_m-bem-coberto para que tenhamos $Ho\{G_i\}$ Z_m-bem-coberto como mostrado na figura 21. Na verdade, mostraremos no teorema 35 condições sobre H e $\{G_i\}$ para que $Ho\{G_i\}$ seja Z_m-bem-coberto.

Em(Topp and Volkmann, 1992) uma versão do seguinte teorema para grafos bem-cobertos é provado. Estendemos o resultado para grafos Z_m-bem-cobertos.

TEOREMA 35. *(*Barbosa, 1999*) Seja H um grafo e $\{G_1, G_2, ..., G_{|V(H)|}\}$ uma família de grafos não-vazios. Então o produto lexicográfico $Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$ é um grafo Z_m-bem-coberto se e somente se H e $\{G_1, G_2, ..., G_{|V(H)}\}$ satisfizerem as seguintes condições:*

(1) G_i é Z_m-bem-coberto para $i = 1, ..., |V(H)|$,

(2) $\sum_{v \in I} \alpha(G_v) \equiv \sum_{u \in J} \alpha(G_u)$ (mod m), para quaiquer dois conjuntos independentes maximais I e J de H.

COROLÁRIO 6. *Se H for Z_m-bem-coberto e $\{G_i\}$, $i = 1, ..., |V(H)|$, for uma família de grafos bem-cobertos com $\alpha(G_i) \equiv \alpha(G_j)$ (mod m), $\forall i, j$, então $Ho(G_1, ..., G_{|V(H)|})$ é Z_m-bem-coberto.*

Em(Pinter, 1991; Pinter, 1994) é provado que um grafo fortemente bem-coberto com mais de 4 vértices tem grau mínimo pelo menos 4 e deve ser 3-conexo. Isto não é verdadeiro para grafos fortemente Z_m-bem-cobertos conforme mostrado na figura 22.

Usando os teoremas 17 e 35, podemos facilmente construir grafos fortemente Z_m-bem-cobertos para qualquer m dado.

TEOREMA 6.1. *(*Barbosa, 1999*)*

Os grafos da forma $(K_{1,ml+1})o2K_1$ são fortemente Z_m-bem-cobertos.

COROLÁRIO 7. *Para qualquer m dado, existem infinitos grafos fortemente Z_m-bem-cobertos planares.*

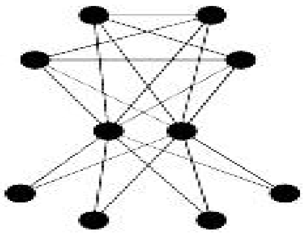

Figura 22. Um grafo fortemente Z_2-bem-coberto

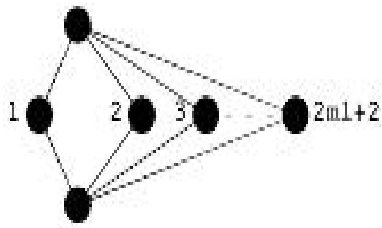

Figura 23. Uma família de grafos fortemente Z_m-bem-cobertos

COROLÁRIO 8. *Para qualquer m dado, existem infinitos grafos fortemente Z_m-bem-cobertos com cintura 4.*

Grafos 1-Z_m-bem-cobertos devem possuir cintura<6.

TEOREMA 36. *(*Barbosa, 1999*)*
Se G for um grafo 1-Z_m-bem-coberto, então cintura $G \leq 5$, $\forall m \in N$.

O mesmo não pode ocorrer com grafos fortemente Z_m-bem-cobertos:

TEOREMA 37. *(*Barbosa, 1999*)*
Não existem grafos fortemente Z_m-bem-cobertos com cintura≥ 6, além dos grafos K_1 e K_2.

Não temos conhecimento de exemplos de grafos fortemente Z_m-bem-cobertos e nem de 1-Z_m-bem-cobertos com cintura 5. Isto nos leva a conjecturar que não existem grafos com esta propriedade.

Também não temos exemplos de grafos 1-Z_m-bem-cobertos e não 1-bem-cobertos com cintura 4. Isto também nos leva a conjecturar que se um grafo com cintura 4 for 1-Z_m-bem-coberto, então ele deve ser 1-bem-coberto.

6.3. Corona de Grafos

Dado um grafo G e uma família $\{H_v : v \in V(G)\}$ de grafos indexados pelos vértices de G, o corona $Go\{H_v\}$ é a união disjunta de G e H_v, $v \in V(G)$, com arestas adicionais unindo cada vértice v de G a todos vértices de H_v.

Em(Topp and Volkmann, 1992) o seguinte teorema é provado:

TEOREMA 38. *(*Barbosa, 1999*)*

Sejam G um grafo, e $\{H_v : v \in V(G)\}$ uma família de grafos não-vazios indexados pelos vértices de G. Então o corona $Go\{H_v\}$ é um grafo bem-coberto, se e somente se $\{H_v\}$ consistir de grafos completos.

Inicialmente, daremos uma outra demonstração de que a condição é suficiente. Esta demonstração também serve para provar uma condição suficiente para grafos Z_m-bem-cobertos.

($\Longleftarrow$) Se todo grafo da família $\{H_v\}$ for completo, então o grafo $Ho\{H_v\}$ será simplicial com cada vértice pertencendo a exatamente um simplex, portanto $Ho\{H_v\}$ é bem-coberto.

($\Longrightarrow$)(Topp and Volkmann, 1992) ■

Com a mesma idéia acima é possível provarmos o seguinte resultado:

TEOREMA 39. *(*Barbosa, 1999*)*

Dado um grafo G, e uma família $\{H_v\}$ de grafos não vazios indexados pelos vértices de G, tais que cada grafo H_v seja a união de $ml + 1$ grafos completos, $m, l \in N$, então o grafo $Go\{H_v\}$ é Z_m-bem-coberto.

A condição não é necessária. Sejam $H = K_1$ e $G_v = K_{1,3}$. G_v é Z_2-bem-coberto, mas não completo, e (HoG_v) é Z_2-bem-coberto.

7. Conclusões

Até o momento, a única classe em que havia caracterização de grafos Z_m-bem-cobertos era para a classe dos grafos com cintura pelo menos 6. Neste nosso trabalho, caracterizamos grafos Z_m-bem-cobertos para as classes de grafos $K_{1,3}$-livres, simpliciais, cordais e arco-circulares. Estamos, no momento, finalizando a caracterização de grafos cúbicos Z_m-bem-cobertos. Um outro problema é obter a caracterização de grafos bipartidos Z_m-bem-cobertos, para a qual, como mencionado anteriormente, existe caracterização de grafos bem-cobertos.

Na seção 4 observamos que não existem muitos resultados conhecidos para grafos nas classes $M(2)$ e $I(2)$. Até o momento, só havia caracterização para grafos com cintura ≥ 8 em $M(2)$. Conseguimos aqui uma caracterização de grafos simpliciais em $M(2)$, além de estabelecer condições suficientes para que grafos cordais estejam em $I(2)$. Um próximo passo seria então, tentar estabelecer condições necessárias para que grafos cordais estejam em $I(2)$. Uma outra etapa de trabalho, seria estabelecer condições necessárias e suficientes para que grafos cordais e simpliciais estejam em $M(3)$ e $I(3)$. Também não se sabe a natureza do problema de dado um grafo em $M(2)$, saber se ele pertence ou não a $I(2)$. O teorema 20 estabelece que para grafos $K_{1,3}$-livres temos $M(t) = I(t)$. Para outras classes de grafos não há resultados conhecidos. Uma idéia natural é tentar responder a esta pergunta para outras classes de grafos.

Sobre grafos 1-Z_m-bem-cobertos e fortemente Z_m-bem-cobertos, uma questão ainda não respondida é sobre como construir grafos com cintura 5 em cada uma dessas classes. Provamos não haver grafos com cintura > 5 1-Z_m-bem-cobertos, bem como não há grafos fortemente Z_m-bem-cobertos com cintura > 5. Mostramos maneiras de se construir grafos fortemente Z_m-bem-cobertos com cintura 4, mas não temos uma maneira de construir grafos 1-Z_m-bem-cobertos com cintura 4. Isto nos leva a fazer as seguintes conjecturas:

1) Não existe grafo 1-Z_m-bem-coberto (não 1-bem-coberto) com cintura 4.

2) Não existe grafo fortemente Z_m-bem-coberto com cintura 5.

Dentre outros, destacamos os seguintes problemas para estudos no futuro:

1) Caracterização de grafos bipartidos Z_m-bem-cobertos.

2) Caracterização de grafos com cintura 5 Z_m-bem-cobertos.

Referências

R. Barbosa Sobre conjuntos independentes maximais de um grafo Tese de Doutorado, COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro(1999).

R. Barbosa On 1-Z_m-well-covered and strongly Z_m-well-covered graphs Ars Combinatoria 57, 225-232(2000).

R. Barbosa and B. Hartnell Almost parity graphs and claw-free parity graphs Journal of Comb. Math. and Comb. Comp. 27, 117-122(1998).

R. Barbosa and B. Hartnell Some problems based on the relative sizes of maximal independent sets in a graph Congressus Numerantium 131, 115-121(1998).

R. Barbosa and B. Hartnell Characterization of Z_m-well-covered graphs for some classes of graphs Discrete Mathematics 233, 293-297(2001).

Bondy and Murty Graph theory with applications Macmillan Press Ltd, London(1976).

S.R. Campbell Some results on cubic well-covered graphs PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN(1987).

S.R. Campbell, M.N. Ellingham, and G.F. Royle A characterization of well-covered cubic graphs Journal of Comb. Math. and Comb. Comp. 13, 193-212(1993).

S.R. Campbell and M.D. Plummer On well-covered 3-polytopes Ars Combinatoria 25-A, 215-242(1988).

Y. Caro Subdivisions, parity and well-covered graphs Journal of Graph Theory 25, 85-94(1997).

Y. Caro, M.N. Ellingham, and J.E. Ramey Local Structure when all maximal independent sets have equal weight SIAM J. Discrete Math. 11, 644-654(1998).

Y. Caro and B. Hartnell A characterization of Z_m-well-covered graphs of girth 6 or more Journal of Graph Theory 33, 246-255(2000).

Y. Caro, A. Sebo, and M. Tarsi A characterization of Z_m-well-covered graphs of girth 6 or more Journal of Algorithms 20, 137-156(1996).

V. Chvátal and P.J. Slater A note on well-covered graphs Ann. Discrete Math. 55, 179-182(1993).

O. Favaron Very well covered graphs Discrete Math. 42, 177-187(1982).

A. Finbow and B. Hartnell A game related to covering by stars Ars Combinatoria 16, 189-198(1983).

A. Finbow and B. Hartnell A characterization of parity graphs containing no cycle of order five or less Ars Combinatoria 40, 227-234(1995).

A. Finbow, B. Hartnell, and R.J. Nowakowski A characterization of well-covered graphs of girth 5 or greater J. Combin. Theory Ser. B 57, 44-68(1993).

A. Finbow, B. Hartnell, and R.J. Nowakowski A characterization of well-covered graphs that contain neither 4 nor 5-cycles Journal of Graph Theory 18, 713-721(1994).

A. Finbow, B. Hartnell, and C. Whitehead A characterization of graphs of girth eight or more with exactly two sizes of maximal independent sets Discrete Math. 125, 153-167(1995).

B. Hartnell Well-covered graphs Journal Comb. Math. Comb. Comp. 29, 107-115(1999).

B. Hartnell and M.D. Plummer On 4-connected claw-free well-covered graphs Discrete Applied Math. 64, 57-65(1996).

R.B. Hayward Weakly triangulated graphs J. Combin. Theory B 39, 200-209(1985).

R.M. Karp Complexity of computer computations In R.E. Miller and J.W. Thatcher, editors, Reducibility among combinatorial problems, pages 85-103, New York(1972).

M. Lesk, M.D. Plummer, and W.R. Pulleyblank Equimatchable graphs In B. Bollobás, editor, Graph Theory and Combinatorics, pages 239-254, London(1984).

L. Lovász and M.D. Plummer Matching Theory North-Holland, Amsterdam(1986).

M.R. Pinter W_2 graphs and strongly well-covered graphs: two well-covered graph subclasses PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN(1991).

M.R. Pinter Strongly well-covered graphs Discrete Math. 132, 231-246(1994).

M.D. Plummer Some covering concepts in graphs J. Combin. Theory 8, 91-98(1970).

M.D. Plummer Some covering concepts in graphs J. Combin. Theory 8, 91-98(1993).

E. Prisner, J. Topp, and P.D. Vestergaard Well-covered simplicial, chordal and circular arc graphs Journal of graph Theory 21, 113-119(1996).

J.E. Ramey Well-covered graphs with maximum degree three and minimal non-well-covered graphs PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN(1994).

G. Ravindra Well-covered graphs J. Combin. Inform. System Sci. 2, 20-21(1977).

R.S. Sankaranarayana Well-covered graphs: some new subclasses and complexity results PhD thesis, University of Alberta, Edmonton(1994).

R.S. Sankaranarayana and L.K. Stewart Complexity results for well-covered graphs Networks 22, 247-262(1992).

J.A.W. Staples On some subclasses of well-covered graphs PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN(1975).

J.A.W. Staples On some subclasses of well-covered graphs Journal of Graph Theory 3, 197-204(1979).

D. Tankus and M. Tarsi Well-covered claw-free graphs J. Combin. Theory B 66, 293-302(1996).

J. Topp and L. Volkmann Well covered and well dominated bock graphs and unicyclic graphs Math. Pannonica, $1 \setminus 2$, 55-66(1990).

J. Topp and L. Volkmann On the well coverdness of products of graphs Ars Combinatoria 33, 199-215(1992).

M. Yannakakis and F. Gavril On the well coverdness of products of graphs SIAM J. Appl. Math. 38, 364-372(1989).