ANÁLISE NÃO-STANDARD
Uma Linguagem Para o Estudo da Análise Elementar

Vítor Neves
Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
e-mail: v_neves@mat.ua.pt

SPM
FEVEREIRO DE 1998

Índice

0 Introdução **1**

1 Extensões próprias de $\mathbb{R}$ **3**

2 Transferência **5**

2.1 Exemplos 5

2.2 O Princípio de Transferência 6

3 Continuidade **9**

4 Teorema Fundamental do Cálculo **12**

4.1 Integrais 12

4.2 Derivadas fortes 14

4.3 Teorema Fundamental do Cálculo 18

5 Digressão I **19**

5.1 Teorema de Peano 19

5.2 Continuidade II 22

5.3 Prolongamentos 23

5.4 Derivadas 24

5.5 Microscópios I 25

5.6 As funções *seno* e *coseno* 28

5.7 Microscópios II 29

5.8 Funções exponenciais e suas inversas 30

6 Linguagem Formal **32**

7 Fundamentos **35**

7.1 Superestruturas 35

7.2 Modelos 35

7.3 Uma extensão própria do corpo real 36

8 Teoria dos Conjuntos Internos **38**

9 Digressão II **41**

9.1 Equicontinuidade 41

0 Introdução

Com o presente texto propomo-nos, entre outros fins, mostrar que *é possível* **provar** *teoremas maiores da Análise Matemática bastante cedo no desenvolvimento da teoria, com uma terminologia porventura mais intuitiva que qualquer das usuais e evitando quase sempre a argumentação contravariante, característica das demonstrações clássicas.*

É frequentemente mais importante conhecer algumas aplicações de um teorema do que a sua demonstração a partir de uma axiomática determinada; em parte por isso, cremos que vale a pena tentar uma aproximação ao Cálculo, partindo de uma axiomática mais extensa.

Por outro lado, a realidade — seja ela o que for — escapa frequentemente à generalização, senão vejamos:

Quando se diz que uma função real de variável real é contínua se o seu gráfico se pode desenhar sem "levantar o lápis do papel"está-se de facto a afirmar que **toda a função real de variável real contínua é seccionalmente de classe C^2!** Repare-se que se desenha a certa velocidade, supostamente contínua, e exercendo força "sobre o papel", também de forma contínua. O gráfico de uma função contínua é afinal suave a menos de alguns — poucos — "cantos"... Uma função contínua "sem"gráfico é realmente chocante...

Cremos também que uma parte da importância da Matemática reside na riqueza de definições, com suas distinções e equivalências.

Recordemos um lugar comum

> *Todo o conceito profundo é difícil e não deixa de ser qualquer das coisas por mera reformulação. Podemos apenas mudar a localização das dificuldades.*

E passemos a algumas observações sobre este trabalho.

A demonstração do **Teorema da Função Inversa** para funções reais de variável real contínuas que apresentamos (teorema 3.4) não apela à ordem de $\mathbb{R}$, tem apenas a ver com a compacidade local; vale tal qual para demonstrar que *uma bijecção contínua entre dois espaços topológicos separados é um homeomorfismo se o domínio é compacto.* A demonstração do teorema 3.6 (de continuidade uniforme) vale do mesmo modo para funções entre espaços métricos, cujo domínio é compacto.

O teorema 5.2 mostra a equivalência entre a definição de continuidade que damos (3.1) e as definições clássicas.

A demonstração do teorema 5.4 põe em evidência a importância de se poder utilizar definições adequadas às circunstâncias; nomeadamente pensamos que ilustra o lugar comum acima enunciado: a definição clássica de limite também aqui tem o seu lugar.

A propósito da definição de função **fortemente diferenciável,** (definição 4.2) observamos que:

- um número muito significativo de teoremas importantes de Análise se inicia por "Seja $f : [\cdots] \rightarrow [\cdots]$ uma função de classe C^k", em que $k \geq 1$.
- sem recorrer a funções de mais de uma variável, define-se uma derivada de função real de variável real que é contínua (teorema 5.6; veja-se também [14]).

As Digressões (secções 5 e 9) ilustram abordagens a problemas de dificuldade prática e teórica variada.

O capítulo 8 alerta para uma forma significativamente diferente de fazer Análise Não Standard: o conjunto de esquemas de axiomas novos é extremamente reduzido. A ligação com a teoria que desenvolvemos aqui é estudada em [5] por Keith Stroyan e Francine Diener.

O leitor interessado encontrará na bibliografia muitas aplicações da Análise Não Standard de variadíssimos níveis de dificuldade.

Em [10] apresenta-se uma proposta muito recente de aproximação ao Cálculo no Ensino Secundário.

O texto que se segue é baseado no curso **Análise Não Standard** que leccionámos no *Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática,* em Fevereiro de 1998. As exposições (des)cobriram essencialmente os quatro primeiros capítulos e os teoremas 5.2, 5.3 e 5.4.

Vtor Neves
Aveiro, Fevereiro de 1998

1 Extensões próprias de $\mathbb{R}$

Designemos por $\mathcal{K}$ uma extensão própria do corpo ordenado dos números reais; mais precisamente, $\mathcal{K}$ designa um corpo ordenado que estende propriamente $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1 *$\mathcal{K}$ tem um elemento positivo menor que qualquer número real positivo.*

Dem. Por hipótese $\mathcal{K}$ tem um elemento, digamos k, que não é um número real e podemos supor positivo (tomando simétricos, se necessário). Podem dar-se três casos

1. $\forall r \in \mathbb{R}[r > 0 \Rightarrow 0 < k < r]$
2. $\forall r \in \mathbb{R}[r > 0 \Rightarrow r < k]$
3. $\exists r \in \mathbb{R}\ 0 < k < r$

No primeiro caso nada há a provar, no segundo caso $\frac{1}{k}$ é positivo e menor que qualquer número real positivo.
No terceiro caso, seja $A = \{x \in \mathbb{R} : x < k\}$. $A \neq \emptyset$, — pois $-r \in A$ — e A é majorado por r; portanto A tem supremo em $\mathbb{R}$; digamos que $supA = a \in \mathbb{R}$. Por um lado $a \neq k \notin \mathbb{R}$, por outro, se $|a - k|$ não fosse menor que qualquer número real positivo, a não poderia ser o supremo de A em $\mathbb{R}$. Assim $|a - k|$ é o elemento cuja existência procurávamos provar. $\square$

Designamos por *infinitesimais* os elementos de $\mathcal{K}$ cujo valor absoluto é menor que qualquer número real positivo. O conjunto de todos os infinitesimais notar-se-á por **mon** ou **mónada de zero**. Se $a \in \mathbb{R}$, a **mónada** de a é $a + \mathbf{mon}$. Repare-se que

Proposição 1.1 *O único infinitesimal real é zero e, portanto, dois números reais distintos têm mónadas dijuntas.*

Os *infinitamente grandes* ou *ilimitados* de $\mathcal{K}$ serão os elementos cujo valor absoluto é maior que qualquer número real positivo. Os elementos *finitos* ou *limitados* serão os que estão entre dois números reais. Formalizando

1. x é $infinitesimal \Leftrightarrow x \in \mathbf{mon} \;\Leftrightarrow\; \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}[\mathbf{r} > \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{x}| < \mathbf{r}]$

2. x é *ilimitado* ou *infinitamente grande* $\Leftrightarrow\ \forall r \in \mathbb{R}[r > 0 \Rightarrow |x| > r]$

3. x é *limitado* ou *finito* $\Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbb{R}|x| < r$

Registem-se algumas proposições importantes de fácil demonstração.

Teorema 1.2 *Valem as seguintes proposições*

1. *Se* $x \in \mathbf{mon}$ & $|\mathbf{y}| < \mathbf{x}$ *então* $y \in \mathbf{mon}$.
2. *A soma e o produto de dois infinitesimais é infinitesimal.*
3. *A relação* $\cdot \approx \cdot$ *é de equivalência.*
4. *A soma e o produto de dois limitados é limitada.*
5. *O produto de um limitado por um infinitesimal é infinitesimal.*
6. *O inverso (oposto multiplicativo) de um infinitesimal não nulo é ilimitado e o inverso de um ilimitado é infinitesimal.*

Uma consequência imediata da proposição 1.1 é que a diferença entre dois números reais distintos não é infinitesimal, de onde se segue:

Teorema 1.3 *Qualquer elemento limitado de* $\mathcal{K}$ *está a uma distância infinitesimal de um e um só número real.*

Dem. O estudo do terceiro caso no teorema 1.1 mostra a existência. De acordo com a proposição 1.1, há unicidade. □

Para cada elemento limitado $x \in \mathcal{K}$ designaremos por $st(x)$ ou *parte standard de* x o número real cuja existência e unicidade é garantida pelo teorema 1.3.

Teorema 1.4 *Para quaisquer elementos limitados* $x, y \in \mathcal{K}$,

1. $st(x) - x \in \mathbf{mon}$
2. $x \leq y \ \Rightarrow\ st(x) \leq st(y)$
3. $st(x + y) \ = \ st(x) + st(y)$
4. $st(xy) \ = \ st(x)st(y)$

2 Transferência

2.1 Exemplos

Como seria de esperar, $\mathcal{K}$ não é completo: **mon** é limitado e não é vazio, mas não tem supremo em $\mathcal{K}$; no entanto qualquer função real de variável real e algébrica tem uma extensão natural a $\mathcal{K}$, dada pela mesma expressão formal. Analisemos alguns exemplos, com vista a uma definição de continuidade.
Mais um pouco de notação:

$$x \textit{ está } \textbf{infinitamente próximo} \textit{ de } y \ \Leftrightarrow x \approx y \ \Leftrightarrow x - y \in \textbf{mon}$$

Exemplo 2.1 $f(x) = x^2$

1. $x \approx y \ \Rightarrow \ x^2 \approx y^2$, quando x *e* y *são limitados,* pois $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ e $x + y$ é limitado. Mas
2. Se Ω é ilimitado, então $\Omega \approx \Omega + \frac{1}{\Omega}$ e $(\Omega + \frac{1}{\Omega})^2 - \Omega^2 = 2 + \frac{1}{\Omega^2} \approx 2 \notin$ **mon**

Exemplo 2.2 $f(x) = \frac{1}{x}$. tomem-se $x, y \in \mathcal{K}\backslash\{0\}$ e observe-se que

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{xy}\right| |x - y|$$

1. Se $0 \not\approx x \approx y$ então $\left|\frac{1}{xy}\right|$ é finito e a diferença no primeiro membro é infinitesimal.
2. Se $0 \approx x$, então $x \approx 2x$ mas $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right| = \left|\frac{1}{2x}\right| \notin$ **mon**

Exemplo 2.3 $f(x) =\sqrt[3]{x}$. Tome-se $x \in \mathcal{K}$ e um infinitesimal não nulo h.

$$'3x + h -' 3x = \frac{1}{\left('3x + h^2 \ + \ '3x + h'3x \ + \ '3x^2\right)} \cdot h$$

O segundo membro da equação é sempre infinitesimal, mas se $x \approx 0$, o primeiro factor é ilimitado.

E ainda um exemplo de natureza distinta.

Exemplo 2.4 Seja Ω um elemento ilimitado de $\mathcal{K}$ e defina-se $\phi(x) = \Omega x$ $(x \in \mathcal{K})$. Tome-se $a \in \mathcal{K}$ e seja $b_i = a + \frac{1}{\Omega^i}$ $(i = 1, 2)$.

1. $b_1 \approx a$, mas $\phi(b_1) = \phi(a) + 1 \not\approx \phi(a)$.

2. $b_2 \approx a$, e $\phi(b_2) = \phi(a) + \frac{1}{\Omega} \approx \phi(a)$.

De facto, dado $\delta > 0$ em $\mathcal{K}$, se $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{\Omega}$ também em $\mathcal{K}$, tem-se $|\phi(x) - \phi(a)| < \delta$ sempre que $|x - a| < \varepsilon$. Em particular, se $x - a$ for suficientemente infinitesimal, $\phi(x) \approx \Phi(a)$.

Nos trs casos em que a função é extensão de uma função real de variável real,

1. Se a é um elemento real do domínio e $x \approx a$, então $f(x) \approx f(a)$. O que talvez não seja de estranhar, pois as funções são contínuas.

2. No entanto as duas primeiras funções não são uniformemente contínuas, e tal é ilustrado por alguma irregularidade do comportamento enquanto controlado apenas por números reais.

3. A terceira função é uniformemente contínua e a "irregularidade" irá aparecer na derivada — a função não é Lipschitziana.

4. A última função não é extensão de uma função real de variável real, mas, tanto quanto a linguagem dos corpos pode distinguir, é contínua segundo a definição clássica aplicada à nova estrutura e não "obedece a critérios infinitesimais" arbitrários.

2.2 O Princípio de Transferência

Como se verá, poderíamos continuar a fazer Análise Não-Arquimediana em $\mathcal{K}$, obtendo resultados "razoáveis" sobre continuidade e limites de funções "a menos de um infinitesimal"; mas acabaria por ser claro que cada vez mais nos afastaríamos da Análise Matemática Clássica e não é esse o nosso fim.

Passamos a enunciar características de uma extensão $\mathcal{K}$ particular, designada por $^*\mathbb{R}$, de cuja existência será se tratar adiante, na secção 7.2. Os elementos de $^*\mathbb{R}$ serão designados por números *hiperreais,* particularizando por *hipernaturais, hiperinteiros, hiperracionais,*etc.

Supomos que o leitor está habituado a utilizar a linguagem da Lógica Formal (de Primeira Ordem) para enunciar proposições e definir entidades matemáticas. Determinamos ainda que as formalizações serão sempre feitas *limitando os domínios das variáveis*. Designaremos esta linguagem por *linguagem elementar de* $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.5 Por exemplo, o **Axioma de Completude** nos números reais entende-se como formalizao da seguinte expressão informal

$$\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})[x \neq \emptyset \ \wedge x \ tem \ majorante \ \Rightarrow \ x \ tem \ supremo] \tag{1}$$

Vejamos como formalizar completamente.

1. y é majorante de $x \ = \phi(y) \ = y \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall z \in \mathbb{R}[z \in x \Rightarrow z \leq y]$
2. u é supremo de $x \ = \psi(u) \ = \phi(u) \ \wedge \ \forall v \in \mathbb{R}[\phi(v) \Rightarrow u \leq v]$

A proposição 1 ficará então

$$\forall x \in \mathcal{P}(\mathbb{R})[x \neq \emptyset \ \wedge \exists y \in \mathbb{R}\phi(y) \ \Rightarrow \ \exists u \in \mathbb{R}\psi(u)]$$

Estruturando melhor: Cada elemento do universo clássico do Cálculo – números reais, funções reais, conjuntos de números reais ou de sequências (finitas) de números reais ou de conjuntos de números reais, relações de ordem, etc. – é designado por uma constante própria – $\emptyset$, π, e, sen, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ... – e, para cada uma destas, existe também a da correspondente extensão não-standard $^*(.)$. Se A é a constante que descreve um certo conjunto clássico, então $^\sigma A$ é a constante atribuida ao conjunto $\{^*a : \ a \in A\}$. A ***-transformada** de uma proposição sobre o universo clássico do Cálculo obtém-se substituindo cada constante c que nela ocorre por $^*c$.
Sem mais, poderíamos enunciar, de um modo ainda informal, a propriedade fundamental de $^*\mathbb{R}$, a saber:

Princípio de Transferência (ou de Leibniz)

Qualquer proposição formalizável na linguagem elementar de $\mathbb{R}$ é verdadeira sse a proposição que dela se obtém substituindo cada constante c por $^*c$ é verdadeira em $^*\mathbb{R}$.

Para uma abordagem inicial, esta formulação é suficiente. A secção 6 apresenta uma descrição mais cuidada.
O exercício que apresentamos de seguida — e será reformulado em 6.1 — apresenta algumas proposições úteis, cuja demonstração consiste essencialmente em formalizar adequadamente o que se pretende mostrar.

Exercícios 2.1 Mostre que

1. Todo o conjunto não vazio e majorado que pertença a $^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tem supremo (como vimos acima...)

2. Designe-se por $\mathcal{PF}(\mathbb{R})$ o *conjunto das partes finitas de* $\mathbb{R}$. Todo o conjunto em ${}^*\mathcal{PF}(\mathbb{R})$ tem máximo.

3. $\mu(0) \notin^* \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

4. O conjunto dos números finitos não pertence a ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$

5. Os conjuntos ${}^\sigma\mathbb{N}$ e ${}^\sigma\mathbb{R}$ não pertencem a ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

6. O conjunto dos números hiper-racionais standard estritamente entre 0 e 1 não pertence a ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Para fixar terminologia:

Definição 2.1 *Uma entidade dir-se-á* **standard** , se for clássica ou ${}^*x$ para alguma entidade clássica x; uma entidade é **interna** *se for elemento de alguma* ${}^*x$*.*

O exercício 6.1 é a reformulação do anterior com esta terminologia.
Uma relao entre mnadas e vizinhanas:

Teorema 2.1 I Princpio de Cauchy *Se* $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $\mu(x) \subseteq^* A$*, ento existe* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq A$*.*

Dem. Pelo Princípio de Transferência, se

$$E \ = \ \{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ |\ \forall y \in A[|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in A]$$

então

$${}^*E \ = \ \{\varepsilon \in^* vtr^+ |\ \forall y \in^* A[|y - x| < \varepsilon \Rightarrow y \in^* A]$$

Ora se $\mu(x) \subseteq^* A$ então, em particular, ${}^*A \neq \emptyset =^* \emptyset$; pelo Princípio de Transferência, também $A \neq \emptyset$, ou seja, A contém uma vizinhança standard de x. $\square$

3 Continuidade

No que se segue, como é habitual, designaremos as funções (ou as constantes) e suas *-extensões pelo mesmo símbolo, bem como identificamos A e ${}^{\sigma}A$, sempre que tal não cause ambiguidade.

Definição 3.1 *Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dir-se-á contínua se, para qualquer $x \in A$, quando $y \in^* A$ & $y \approx x$ se tem $f(y) \approx f(x)$.*

Seguindo uma apresentação clássica, pode demonstrar-se facilmente, sempre para funções reais de uma variável real,

Teorema 3.1 *Valem as seguintes proposições:*

1. *As funções constantes são contínuas*
2. *A soma e o produto de funções contínuas é uma função contínua.*
3. *A função $x \mapsto \frac{1}{x}$ é contínua (Veja-se o exemplo 2.2).*
4. *A composição de funções contínuas é contínua.*

Teorema 3.2 (Teorema do Valor Intermédio) *Se a função contínua $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Dem. Mais uma vez, seja N um número hipernatural ilimitado e considerem-se os elementos $x_n \in^* [a, b]$ da forma $x_n = a + n\frac{b-a}{N}$ $\quad (0 \leq n \leq N)$. Como $f(x_0) = f(a) < 0 < f(b) = f(x_N)$, existe um primeiro n, para o qual $0 < f(x_n)$ (exercício 2.12), digamos $f(x_{n-1}) \leq 0 < f(x_n)$, de onde resulta

$$st\left(f(x_{n-1})\right) \leq 0 \leq st\left(f(x_n)\right).$$

Mas, pela continuidade de f e porque $x_{n-1} \approx x_n$,

$$\begin{aligned} st\left(f(x_{n-1})\right) &= f\left(st(x_{n-1})\right) \\ &= f\left(st(x_n)\right) \\ &= st\left(f(x_n)\right) \end{aligned}$$

e, tomando $c = st(x_n)$, conclui-se $f(c) = 0$. É claro que c é um número real estritamente entre a e b. □

Teorema 3.3 (do Máximo) *Se a função* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a < b)$ *é contínua, então tem um valor máximo e um valor mínimo.*

Dem. Demonstraremos apenas que f tem máximo.
Seja N um número hipernatural ilimitado e considerem-se os elementos $x_n \in^* [a, b]$ da forma $x_n = a + n\frac{b-a}{N} \quad (0 \leq n \leq N)$. O conjunto hiperfinito (interno) $\{f(x_n) : \; 0 \leq n \leq N\}$ tem um máximo (pelo Princípio de Transferência), digamos

$$f(x_n) \; \leq \; f(x_{n_0}) \qquad (0 \leq n \leq N).$$

Vamos ver que $f\left(st(x_{n_0})\right)$ é máximo de f. Dado $x \in [a, b]$, existe (uma infinidade de) x_n tal que $x \approx x_n$, e tem-se, pela continuidade de f,

$$f(x) = f\left(st(x_n)\right) = st\left(f(x_n)\right) \leq st\left(f(x_{n_0})\right) = f\left(st(x_{n_0})\right)$$

□

Para dar conta de todas as funções algébricas:

Teorema 3.4 *Se a função* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (a < b)$ *é contínua e bijectiva, a sua inversa é também uma função contínua.*

Dem. Pelos dois teoremas anteriores, $f([a, b]) = [c, d]$, para certos c, d distintos em $\mathbb{R}$. Basta assim mostrar que, para cada $x \in [a, b]$,

$$y \approx x \; \Leftrightarrow \; f(y) \approx f(x) \qquad (y \in^*]a, b[)$$

Como f é contínua por hipótese, basta de facto mostrar que, para $x \in [a, b]$ e $y \in^*]a, b[$,

$$y \not\approx x \; \Rightarrow f(y) \not\approx f(x).$$

Suponha-se então que $y \not\approx x$. Tem-se $y \approx st(y) \neq x$; por um lado $f(x) \neq f(st(y))$, porque f é injectiva, e assim $f(x) \not\approx f(st(y))$ (proposição 1.1); mas $f(y) \approx f(st(y))$, consequentemente $f(y) \not\approx f(x)$. □

Podemos concluir que

Teorema 3.5 *Todas as funções reais de variável real algébricas são contínuas.*

Definição 3.2 *Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dir-se-á uniformemente contínua se, para qualquer $x \in^* A$, quando $y \in^* A$ & $y \approx x$ se tem $f(y) \approx f(x)$.*

Teorema 3.6 *Se a função $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então é uniformente contínua.*

Dem. Tomem-se x, y arbitrários em $^*[a,b]$, tais que $x \approx y$; x é limitado, consequentemente tem parte standard (teorema 1.3) e segue-se de $a \leq x \leq b$ que

$$a = st(a) \ \leq \ st(x) \ \leq st(b) = b$$

Assim tem-se $x \approx st(x) \approx y$ e, como f é contínua, $f(x) \approx f(st(x)) \approx f(y)$ e $f(x) \approx f(y)$ como se pretendia mostrar. $\square$

4 Teorema Fundamental do Cálculo

4.1 Integrais

Definição 4.1 *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*, uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *diz-se* **integrável** *em* $[a, b]$ *se para todos os números hipernaturais ilimitados* $n \in^* \mathbb{N}$ *e qualquer função interna* $x \equiv i \mapsto x_i \in [a + i\frac{1}{n}, a + (i+1)\frac{1}{n}] \quad (0 \leq i \leq [nb] - 1)$ *as somas*

$$S(f, n, a, b, x) = \sum_i f(x_i)\frac{1}{n}$$

são finitas e têm a mesma parte standard; essa parte standard comum dir-se-á o **integral de** f **em** $[a, b]$ *e nota-se*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; st\,(S(f, n, a, b, x))\,.$$

Teorema 4.1 *Se a função* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é contínua, então é integrável em* $[a, b]$*.*

Dem. Os vários hipernaturais n e m considerados serão sempre ilimitados.
Em primeiro lugar tem-se

$$|S(f, n, a, b, x)| \;\leq\; Máx\{|f(x)| : \; x \in [a, b]\}(b - a)$$

Pelo que as somas são finitas.
Em segundo lugar

$$|S(f, n, a, b, x) - S(f, n, a, b, y)| \;\leq\; Máx\{|f(x_i) - f(y_i) : \; 0 \leq i \leq n - 1\}(b - a) \approx 0$$

O máximo no segundo membro é infinitesimal, porque todos os elementos comparados são (teorema 3.6), e portanto o primeiro membro também é infinitesimal.
Dados n & x e m & y quaisquer, podemos formar somas $S'(f, mn, a, b, \overline{x})$ e $S'(f, mn, a, b, \overline{y})$ onde

$$\overline{x}_j = x_i \text{ se } [a + j\frac{1}{mn}, a + (j+1)\frac{1}{mn}] \subseteq [a + i\frac{1}{n}, a + (i+1)\frac{1}{n}]$$

e

$$\overline{y}_j = y_i \text{ se } [a + j\frac{1}{mn}, a + (j+1)\frac{1}{mn}] \subseteq [a + i\frac{1}{m}, a + (i+1)\frac{1}{m}]$$

As somas S' não são somas do tipo que convencionámos inicialmente — as escolhas não estão necessariamente no intervalo do mesmo índice — mas servem como elementos de comparação. Tem-se

$$\begin{aligned} |S(f,n,a,b,x) - S(f,m,a,b,y)| &\leq |S(f,n,a,b,x) - S(f,mn,a,b,\overline{x})| \\ &+ |S(f,mn,a,b,\overline{x}) - S(f,mn,a,b,\overline{y})| \\ &+ |S(f,mn,a,b,\overline{y}) - S(f,n,a,b,y)| \end{aligned}$$

Todas as parcelas do segundo membro são de novo infinitesimais e podemos concluir que o primeiro membro também é, isto é, as somas têm a mesma parte standard. □

Com as convenções usuais: $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, não é difícil mostrar que

Teorema 4.2 *Se a função f é integrável em $[a,b]$ então*

1. *f é limitada*
2. *Se $m = inf\{f(x): \ a \leq x \leq b\}$ e $M = sup\{f(x): \ a \leq x \leq b\}$,*
$$m(b-a) \ \leq \ \int_a^b f(x)dx \ \leqq \ M(b-a)$$
3. *Se $a \leq c, d \leq b$,*
$$\int_a^d (x)dx \ - \ \int_a^c f(x)dx = \int_c^d f(x)dx$$
4. *A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ é contínua.*
5. *Se f e g são funções integráveis em $[a,b]$ e $r \in \mathbb{R}$, então*
$$\int_a^b (rf+g)(x)dx \ = \ r\int_a^b f(x)dx \ + \ \int_a^b g(x)dx.$$

Será bastante mais fácil demonstrar os mesmos resultados com f contínua, em particular a parte 3. E é esta a situação que de facto nos interessa para o Teorema Fundamental do Cálculo.

4.2 Derivadas fortes

Definição 4.2 *Uma função* $f :]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* **fortemente diferenciável** *se existe uma função* $f' :]a,b[\to \mathbb{R}$*, designada por* **derivada forte** *de* f*, tal que, para qualquer* $x \in {}^*]a,b[$*, se* $st(x) \in]a,b[$ *e* $0 \neq \Delta x \approx 0$*, então*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \approx f'(x) \tag{2}$$

Vejamos algumas propriedades das derivadas fortes. A função dada pela equação (14) é uma fonte para a compreensão sobre o significado de diferenciabilidade forte.

Teorema 4.3 *As derivadas fortes so funes contnuas.*

Dem. Se $x \in]a,b[$ e $0 \neq \Delta x \approx 0$, tem-se, aplicando a definição quer a x quer a $x+\Delta x$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= f'(x)+\varepsilon \\ &= f'(x+\Delta x)+\delta \end{aligned}$$

com $\varepsilon, \delta \approx 0$ e portanto

$$f'(x+\Delta x)-f'(x) = \varepsilon - \delta \approx 0$$

como se pretendia verificar. □

Perante este teorema, é de esperar o seguinte.

Teorema 4.4 *Se a função* $f :]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é fortemente diferenciável,* $c \in]a,b[$ *e* $f'(c) > 0$*, então* f *é crescente em alguma vizinhança (standard) de* c*.*

Observe-se que se f for diferenciável no sentido clssico, pode ter-se $f'(c) > 0$ sem que f seja monótona em torno de c.

Exemplo 4.1 Considere-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

É fácil verificar que, no sentido clssico, $f'(0) = 1$; no entanto, se k é um número hipernatural qualquer tem-se

$$x_1 = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1} > x_2 = (\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)^{-1} > x_3 = (\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi)^{-1},$$

mas

$$f(x_1) > f(x_2) < f(x_3).$$

Ora, se k for infinito, $x_i \in \mu(0)$ $(i = 1, 2, 3)$, e podemos concluir que f não é monótona em qualquer vizinhança de zero.

No que segue convencionamos a seguinte notao

$$a << b \equiv [a < b \ \& \ a \not\approx b] \qquad \& \qquad a >> b \equiv [a > b \ \& \ a \not\approx b]$$

Dem. (Teorema 4.4) Se $x, y \approx c$ e $x \neq y$ tem-se

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \approx f'(c) >> 0$$

pelo que, necessariamente a fracção é positiva, ou seja $f(x) - f(y)$ e $x - y$ têm o mesmo sinal. Vimos então que f é crescente na mónada de c; pelo I Princípio de Cauchy (teorema 2.1), f é crescente numa vizinhança standard de c. □

Vejamos mais um teorema importante.

Teorema 4.5 (da Função Inversa) *Suponha-se que a função* $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é fortemente diferenciável, que* $c \in]a, b[$ *e* $f'(c) \neq 0$. *Nestas condições, existem vizinhanças standard* U *de* c *e* V *de* $f(c)$ *tais que*

1. $f : U \to V$ *é uma bijecção bicontínua*
2. $f^{-1} : V \to U$ *é fortemente diferenciável e*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (x \in U).$$

Dem. Suponha-se, para fixar ideias, que $f'(c) > 0$, pelo que f é crescente em algum intervalo aberto $U \subseteq]a, b[$ que contém c; como f é diferenciável, também é contínua e, pelo Teorema do Valor Intermédio, $f(U)$ é um intervalo aberto V que contém $f(c)$, sendo claro que $f : U \to V$ é uma bijecção. Para mostrar que f^{-1} é contínua, vamos provar que

$$x \not\approx y \ \Rightarrow \ f(x) \not\approx f(y) \qquad (x, y \in {}^*U)$$

Se $x \not\approx y$, podemos supor $x << y$ e daí concluir que existem dois números reais (standard) u, v tais que $x < u << v < y$; mas assim $f(x) < f(u) << f(v) < f(y)$ e $f(x) \not\approx f(y)$, como queríamos demonstrar. Temos então, de facto,

$$z \approx w \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(z) \approx f^{-1}(w) \qquad (z, w \in V)$$

Podemos supor que, para certos $\alpha, \beta \in]a, b[$,

$$U =]\alpha, \beta[\quad \& \quad V =]f(\alpha), f(\beta)[\tag{3}$$

e ainda que

$$f'(x) \; > \; \frac{f'(c)}{2} \; >> \; 0 \qquad (x \in U) \tag{4}$$

Passemos à derivada da função inversa. Tome-se $z \in V$ e $\Delta z \approx 0$ com $\Delta z \neq 0$; valem as seguintes condições, para $x = f^{-1}(z)$ & $\Delta x = f^{-1}(z + \Delta z) - f^{-1}(z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(z+\Delta z) - f^{-1}(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\
&= \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} \\
&\approx \frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}$$

pois $a << \alpha < x < \beta << b$ (por (3)) e portanto $a << x << b$, pelo que $f'(x)$ é finito e não infinitesimal (por 4), valendo a aproximação infinitesimal, como se pretendia. $\square$

Um **Teorema da Média** com demonstração que tem de facto a ver com médias.

Teorema 4.6 (da Média) *Se a função* $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é fortemente diferenciável e* $\alpha, \beta \in]a, b[$*, então, para algum* $c \in]\alpha, \beta[$*,*

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = f'(c) \tag{5}$$

Dem. Tome-se um número hipernatural infinitamente grande N. Por traqnsferncia das propriedades da soma, tem-se

$$f(\beta) - f(\alpha) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[f(a + (i+1)\frac{(\beta - \alpha)}{N}) - f(a + i\frac{(\beta - \alpha)}{N}) \right]$$

e daí

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(a + (i+1)\frac{(\beta-\alpha)}{N}) - f(a + i\frac{(\beta-\alpha)}{N})}{\frac{\beta-\alpha}{N}} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[f'(a + i\frac{(\beta - \alpha)}{N}) + \varepsilon_i \right] \end{aligned}$$

para certos $\varepsilon_i \approx 0$ $(0 \leq i \leq N-1)$. A razão incremental é assim uma hipermédia aritmética, estando portanto entre dois dos termos da soma

$$f'(a + i\frac{(\beta - \alpha)}{N}) + \varepsilon_i \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq f'(a + j\frac{(\beta - \alpha)}{N}) + \varepsilon_j$$

Segue-se que

$$st\left(f'(a + i\frac{(\beta - \alpha)}{N}) \right) \leq st\left(\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right) \leq st\left(f'(a + j\frac{(\beta - \alpha)}{N}) \right)$$

donde, pela continuidade de f',

$$f'\left(st(a + i\frac{(\beta - \alpha)}{N}) \right) \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq f'\left(st(a + j\frac{(\beta - \alpha)}{N}) \right)$$

e também existe algum c entre $st(a + i\frac{(\beta-\alpha)}{N})$ e $st(a + j\frac{(\beta-\alpha)}{N})$ para o qual vale (5) e de facto $\alpha < c < \beta$. $\square$

4.3 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 4.7 (I Teorema Fundamental) *Se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é fortemente diferenciável, então*

$$\int_a^b f'(x)dx \;=\; f(b) - f(a).$$

Dem. A derivada f' é integrável, pelos teoremas 4.3 e 4.1.
Seja n um hipernatural ilimitado e designe-se

$$a_i \;=\; a + i\frac{1}{n} \qquad (0 \leq i < bn)$$

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{0\leq i<bn} [f(a_{i+1}) - f(a_i)] \\ &= \sum_{0\leq i<bn} f'(x_i)(a_{i+1} - a_i) \\ &= \sum_{0\leq i<bn} f'(x_i)\frac{1}{n} \\ &\approx \int_a^b f'(x)dx. \end{aligned}$$

A escolha interna x existe, por transferência do Teorema da Média 4.6. Como $f(b) - f(a)$ e $\int_a^b f'(x)dx$ são iguais porque são standard e estão infinitamente próximos.
□

Cremos ter dado pistas suficientes para o leitor encontrar a sua própria demonstração do

Teorema 4.8 (II Teorema Fundamental) *Se $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então*

$$F \equiv x \mapsto \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a,b])$$

é fortemente diferenciável e

$$F' \;=\; f$$

5 Digressão I

5.1 Teorema de Peano

Em ${}^*\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ dois elementos x, y estarão infinitamente próximos, denotando-se $x \approx y$, se para a norma euclideana $\|\cdot\|$ (ou, outra qualquer...), $\|x - y\| \in \mu(0) \subseteq^* \mathbb{R}$. É claro que $x \approx y$ *sse o mesmo acontece em* ${}^*\mathbb{R}$ *entre todas as coordenadas do mesmo nome.*

Uma função real de várias variáveis reais $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ será *contínua* se valer a seguinte condição:

$$\forall x \in A \forall y \in^* A[y \approx x \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| \approx 0].$$

A adaptação do teorema 5.2 é muito simples e o que se segue não deverá apresentar dificuldades de maior.

Voltaremos a este teorema na secção 9.

Teorema 5.1 (de Existência de Peano) *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sendo $a < b$, uma função $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada e $x_0 \in \mathbb{R}$, então existe uma função $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

Dem. Suponha-se que

$$|f(t, x)| \ \leq \ M \tag{6}$$

e seja N um número hipernatural infinito. Defina-se

$$t_n \ = \ a + n\frac{b - a}{N} \qquad (0 \leq n \leq N)$$

Defina-se ainda

$$\begin{aligned} u(t_0) &= x_0 \\ u(t) &= f(t_n, u(t_n))(t - t_n) + u(t_n) \quad (t \in [t_n, t_{n+1}]; \ \ 0 \leq n \leq N - 1) \end{aligned} \tag{7}$$

Tem-se, para $1 \leq n \leq N-1$,

$$u(t_n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (u(t_{i+1} - u(t_i))$$

e, por (7), também

$$u(t_n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i, u(t_i))(t_{i+1} - t_i).$$

Pelo que *todos os* $u(t)$ *são finitos,* já que, por (6) e (7),

$$|u(t)| \leq |x_0| + M(b-a) \quad (t \in^* [a,b]) \tag{8}$$

Por outro lado, se $s \in [t_n, t_{n+1}]$ & $t \in [t_m, t_{m+1}]$, por exemplo com $n+1 \leq m$, tem-se, por (7) e (6),

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u(t)-u(s)}{t-s}\right| &= |f(t_m, u(t_m))(t-t_m) + u(t_m) - f(t_n, u(t_n))(s-t_n) - u(t_n)| \\
&= \left| f(t_m, u(t_m))\frac{t-t_m}{t-s} + \sum_{i=n}^{m-1} f(t_i, u(t_i))\frac{t_{i+1}-t_i}{t-s} - f(t_n, u(t_n))\frac{s-t_n}{t-s} \right| \\
&= \left| f(t_m, u(t_m))\frac{t-t_m}{t-s} + \sum_{i=n+1}^{m-1} f(t_i, u(t_i))\frac{t_{i+1}-t_i}{t-s} + f(t_n, u(t_n))\frac{t_{n+1}-s}{t-s} \right| \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

Em suma

$$|u(t) - u(s)| \leq M|t-s| \qquad (s, t \in^* [a,b]), \tag{9}$$

o que, com (8), nos garante a continuidade de u e daí a boa definição e a continuidade da função $x : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$x(t) \;=\; st\,(u(st(t)))\,,$$

observando também que se $t \in^* [a,b]$, então $st(t) \in [a,b]$.
De facto, para quaisquer $t, s \in [a,b]$

$$|x(t) - x(s)| \approx |u(t) - u(s)| \leq M|t-s|,$$

pelo que

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t-s| \quad (t, s \in [a,b])$$

e

$$|x(t) - x(s)| \leq M|t-s| \quad (t, s \in^* [a,b])$$

pelo **Princípio de Transferência.** Conjugando estes resultados com (9), podemos concluir que *os gráficos de x e de u estão contidos em* ${}^*([a,b] \times [x_0 - M, x_0 + M])$*;* como f é uniformemente contínua em $[a,b] \times [x_0 - M, x_0 + M]$,

$$f(t, x(t)) \approx f(t, u(t)) \qquad (t \in^* [a,b]);$$

mas então o conjunto interno

$$\{\delta : \ \delta \in^* \mathbb{R}^+ \ \& \ |f(t,x(t)) - f(t,u(t))| < \delta, \ \textit{para todo o } t \in^*[a,b]\}$$

contém todos os números reais positivos donde, também terá um elemento infinitesimal positivo, digamos ζ, e tem-se o seguinte, para todo o $t \in^* [a,b]$, se $t \in [t_n, t_{n+1}]$,

$$\begin{aligned} x(t) &\approx u(t) \approx u(t_n) \approx x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i, u(t_i))(t_{i+1} - t_i) \\ &\approx x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i, x(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \zeta \cdot (b-a) \\ &\approx x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i, x(t_i))(t_{i+1} - t_i) \\ &\approx x_0 + \int_a^t f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

isto é,

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, u(s))ds$$

$\square$

Repare-se que nada se afirma quanto à unicidade de solução.

Exercícios 5.1 Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{3}{2}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Obtenha as soluções $x \equiv 0$ e $x = t^3$ utilizando partições infinitesimais.

5.2 Continuidade II

As continuidades até agora consideradas são equivalentes às definidas classicamente.

Teorema 5.2 *Para cada função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, valem as proposições seguintes formalizadas abreviadamente:*

1. *f é contínua sse*

$$\forall x \in A \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall y \in A \left[|y - x| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \delta \right]$$

2. *f é uniformemente contínua sse*

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x, y \in A \left[|y - x| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \delta \right].$$

Dem. Demonstramos apenas 1; o modo de utilização do I Princípio de Cauchy (teorema 2.1) e do Princpio de Transferncia é análogo nos dois casos.
Seja então $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha-se que f é contínua no sentido classico. Tomem-se $x \in [a, b]$ e $y \in^* [a, b]$ tais que $x \approx y$. Queremos mostrar que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+ |f(x) - f(y)| < \delta$$

Dado $\delta > 0$, tome-se um ϵ "adequado"pela definição clássica de continuidade em x. Como $x \approx y$, em particular $|x - y| < \varepsilon$; resulta (pelo Princípio de Transferência) que $|f(x) - f(y)| < \delta$, como queríamos.
Reciprocamente, suponha-se que f é contínua (no sentido, não standard, que temos vindo a utilizar), tome-se $x \in]a, b[$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$; defina-se

$$C_\delta \ = \ \{\varepsilon \in^* \mathbb{R}^+ \ \forall y \in^* A \left[|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta \right]\}.$$

Este conjunto é standard pois, por transferência, é a extensão do conjunto definido pela fórmula clssica correspondente:

$$C_\delta \ = \ ^*\{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall y \in A \left[|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta \right]\}.$$

Vamos ver que $\mu(0) \subseteq^* C \neq \emptyset$. Pelo I Princpio de Cauchy, a demonstração estará feita.
Se $\varepsilon \in \mu(0)$ e $|x - y| < \varepsilon$, então $x \approx y$ pelo que $f(x) \approx f(y)$ por hipótese; mas assim $|f(x) - f(y)| < \delta$. Em suma $\mu(0) \subseteq^* C_\delta$, como queríamos provar. $\square$

5.3 Prolongamentos

Teorema 5.3 *Para quaisquer* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$, $st(^*]a,b[) = st(^*]a,b]) = st(^*[a,b[) = st(^*[a,b]) = [a,b]$

O que, em termos clássicos, afirma que a aderência de qualquer intervalo limitado é o intervalo fechado com os mesmos extremos.
Um teorema de extensão:

Teorema 5.4 *Sejam* $[a,b]$ *um intervalo em* $\mathbb{R}$ *e* A *um subconjunto de* $[a,b]$ *tal que* $st(^*A) = [a,b]$. *Se a função* $f : A \to \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua e todos os elementos de* $f(^*A)$ *são limitados, então* f *tem um prolongamento contínuo único a* $[a,b]$.

E a demonstração poderá fazer-se mostrando que a função dada por

$$\tilde{f}(x) \;=\; st(f(u)) \quad se \quad x \approx u \;\&\; u \in^* A \qquad (x \in [a,b]) \tag{10}$$

é o prolongamento requerido de f.
Vejamos.
Dem. (**do teorema 5.4**) Seja $\tilde{f}$ dada pela condição 10. A função está bem definida, porque dois números infinitamente próximos têm a mesma parte standard.
Pelo teorema 5.2 e pelo princípio de Transferência, dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall x, y \in^* A |x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta. \tag{11}$$

Tome-se $x \in [a,b]$ e tome-se também $y \in [a,b]$ tal que

$$|x - y| < \varepsilon. \tag{12}$$

Por hipótese, existem $\overline{x}, \overline{y} \in^* A$ tais que $x \approx \overline{x}$ e $y \approx \overline{y}$. Como os dois membros da equação 12 são reais, não são infinitamente próximos e portanto

$$|\overline{x} - \overline{y}| < \varepsilon$$

Mas então

$$|f(\overline{x})) - f(\overline{y})| < \delta$$

E temos o seguinte

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| &= |st(f(\overline{x}))) - st(f(\overline{y}))| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

A função $\tilde{f}$ é contínua em x no sentido clássico. □

5.4 Derivadas

O I Princpio de Cauchy (teorema 2.1) tem tambm o seguinte corolrio:

Teorema 5.5 *Dada uma funo $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dados dois nmeros reais a, b, as condies seguintes so equivalentes*

1. $\lim_{x\to a} f(x) \ = \ b$
2. *Se $x \in^* A\backslash\{a\}$ e $x \approx a$, ento $f(x) \approx b$.*

Dem. Defina-se para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$

$$E_\delta \ = \ \{\varepsilon \in \mathbb{R}+ \mid \forall x \in A[0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-b| < \delta\}$$

Pelo Princpio de Transferncia

$$^*E_\delta \ = \ \{\varepsilon \in^* vtr + \mid \forall x \in^* A[0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-b| < \delta\}$$

A demonstrao continua de modo semelhante da primeira parte do teorema 5.2. $\square$

E segue-se

Corolário 5.1 *Uma funo $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to$ diferencivel (no sentido clssico) sse existe uma funo $f' :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to$ de modo que, para qualquer $x \in]a, b[$ e qualquer $\Delta \approx 0$ e no nulo se tem*

$$\frac{f(x+\Delta x) \ - \ f(x)}{\Delta x} \ \approx \ f'(c)$$

Podemos agora demonstrar o

Teorema 5.6 *Para qualquer função $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, as condições seguintes são equivalentes*

1. *f é fortemente diferenciável*
2. *f tem derivada contínua $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$, no sentido clssico.*

Dem. Os teoremas 4.3 e 5.2 estabelecem que $1 \Rightarrow 2$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Suponhamos que f é de classe C^1, que x é quase-standard em $^*]a, b[$ e que $0 \neq \Delta x \approx 0$. Pelo Teorema da Média (transferido) e pela continuidade de f',

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x+\theta\Delta x) \approx f'(x)$$

para algum $\theta \in]0, 1[$. $\square$

5.5 Microscópios I

O microscópio de potência – positiva e infinita – Ω apontado ao ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é a aplicação (mudança de variáveis)

$$M \equiv (u,v) : B_{\frac{2}{\Omega}}(a,b) \subseteq^* \mathbb{R}^2 \to B_2(0,0) \subseteq^* \mathbb{R}^2$$

dada por

$$u \ = \ u(x,y) \ = \ \Omega(x-a) \qquad v \ = \ v(x,y) \ = \ \Omega(y-b).$$

Consideremos alguns exemplos de visão microscópica de gráficos de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 5.1 Para $f(x) \ = \ x^2$ vejamos casos em que o alvo é standard e um caso em que é quase-standard, sempre com potência arbitrária Ω.

1. Alvo $(0,0)$ (Figura 1). Tem-se

$$u = \Omega x \qquad v = \Omega y \qquad 0 \leq v = \Omega\left(\frac{1}{\Omega}u\right)^2 = \frac{u^2}{\Omega} < \frac{1}{\Omega} \approx 0.$$

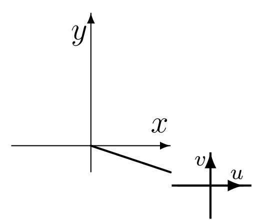

Figura 1: 1

Em visão microscópica o gráfico é um segmento do eixo dos uu, como seria de esperar já que $f'(0) = 0$.

2. Alvo $(1,1)$ (Figura 2). Neste caso

$$u \ = \ \Omega(x-1) \qquad v \ = \ \Omega(y-1)$$

seguindo-se

$$v = \Omega(x-1)(x+1) = u\left(\frac{u}{\Omega}+2\right) = \frac{u^2}{\Omega} + 2u \approx 2u$$

O gráfico microscópico é um segmento de recta de declive 2 — e $2 = f'(1)$.

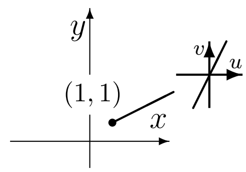

Figura 2: 2

3. Alvo (ε, ϵ) (Figura 3) com $\epsilon \approx 0$.

$$u \;=\; \Omega(x-\varepsilon) \qquad v \;=\; \Omega(y-\varepsilon) \qquad v = \frac{u^2}{\Omega} + 2\varepsilon u \approx 0;$$

pois $f'(\varepsilon) = 2\varepsilon$. Mais uma vez, obtemos um gráfico sobre o eixo dos uu.

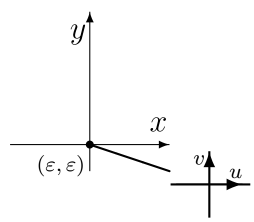

Figura 3: 3

A semelhança de situações nos exemplos 1 e 3 de 5.1 não é arbitrária! Mas vejamos um caso de não diferenciabilidade.

Exemplo 5.2 Consideremos $f(x) = \sqrt{|x|}$.
1. Apontando a $(0,0)$ (Figura 4)

$$v \geq 0 \quad \& \quad |u| \;= \frac{v^2}{\Omega} \;\approx 0.$$

Neste caso o gráfico microscópico está contido no semi-eixo não negativo dos vv e inclui $(0,0)$, o que,por um lado, reflecte o facto de f não ser diferenciável na origem pois

$$\frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{0}}{x - 0} \notin \mathcal{O}$$

e por outro, põe em evidência que a função não é monótona em torno de zero.

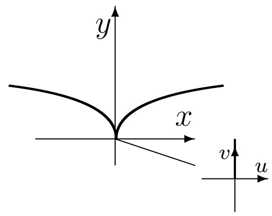

Figura 4: 4

2. Apontando a $(a, a) \approx (0, 0)$ (Figura 5), por exemplo com $a > 0$, vem

$$\begin{aligned} u &= \Omega(x-a) \;=\; \Omega(y^2-a) \\ &= \Omega\left((\frac{v}{\Omega}+\sqrt{a})^2-a\right) \\ &= \frac{v^2}{\Omega}+2v\sqrt{a} \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

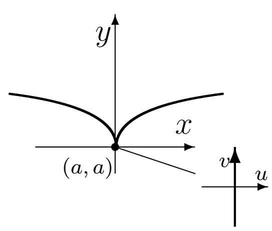

Figura 5: 5

Mas desta vez o gráfico microscópico contido no eixo dos vv intersecta a parte positiva e a parte negativa — se $u < 0$ necessariamente $v < 0$ — pondo em evidência que *a derivada existe em $a \in^* \mathbb{R}$, mas não é um número finito.*

Exercícios 5.2 *Estude imagens microscópicas da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x sen(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Um teorema dá conta de uma parte do que temos vindo a verificar.

Teorema 5.7 *Se $f :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $c \in]a, b[$, a imagem microscópica do gráfico de f em qualquer vizinhança infinitesimal de c (contida em $^*]a, b[$) está contida num segmento de recta com declive $f'(c)$ e $(0, 0)$ não é ponto extremo dessa imagem.*

O que nos traz de facto pequena novidade... Este enunciado reformula a definição de derivada, pondo em evidência que *o erro de aproximação linear da função é pequeno comparado com o erro de aproximação da variável.*

No entanto, os exemplos 5.1.2 e 5.2.2 podem ser enganadores como veremos adiante: o comportamento microscópico de uma função diferenciável em pontos quase-standard pode depender fortemente do alvo e da potência.

Mais um exemplo de visão microscópica, desta feita de uma curva, que não é um gráfico, mas é união de gráficos.

Exemplo 5.3 A circunferência unitária em $\mathbb{R}^2$ tem equação $x^2 + y^2 = 1$. Apontemos um microscópio a um ponto arbitrário (a, b) (Figura 6). Vem

$$\left(\frac{u}{\Omega} + a\right)^2 + \left(\frac{v}{\Omega} + b\right)^2 = 1$$

De onde se retira

$$2au + 2bv \ = \ -\frac{1}{\Omega}(u^2 + v^2) \ \approx 0$$

Ou seja (Figura 6), ao microscópio um arco de circunferência é um segmento de recta.

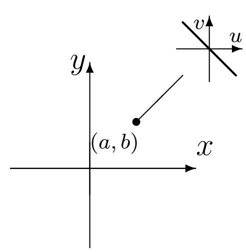

Figura 6: 6

O que diz muito sobre a natureza deste subconjunto de $\mathbb{R}^2$, mas de facto também continua a não ser surpreendente, pois a circunferência é uma justaposição de gráficos de funções diferenciáveis (de x ou de y).

5.6 As funções *seno* e *coseno*

Assentemos na apresentação das funções trigonométricas a partir de triângulos rectângulos, com a extensão ao conjunto dos números reais através do círculo trigonométrico. Neste contexto, se (x, y) representa um ponto da circunferência unitária de $\mathbb{R}^2$ orientada no sentido directo, que determina o arco orientado de comprimento t radianos a partir de $(1, 0)$, tem-se

$$x \ = \ cos(t) \qquad \& \qquad y \ = \ sen(t).$$

Estudemos o caso "canónico"$0 < x << 1$ & $0 < y < 1$ com x e y eventualmente não-standard. Temos então $x = x(t)$ e $y = y(t)$ para algum $t \in^*]0, \frac{\pi}{2}[\backslash \mu(0)$; se Δx e Δy forem os acréscimos correspondentes ao acréscimo infinitesimal Δt a ampliação descrita na figura seguinte (Figura 7) mostra que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -sen(t) \qquad \& \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx cos(t)$$

de onde se conclui

$$cos'(t) \;=\; -sen(t) \qquad \& \qquad sen'(t) \;=\; cos(t).$$

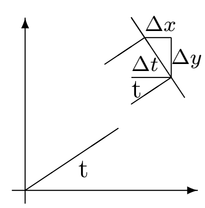

Figura 7: 7

Repare-se que a condição $x \not\approx 1$ é importante: se ela se não verificar o segmento que representa Δt no microscópio é vertical; apesar disso as equações anteriores valem mesmo se x não for standard.

5.7 Microscópios II

Defina-se agora a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Para $0 \neq x \approx 0$ tem-se

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| = |x| \left|sen(\frac{1}{x})\right| \leq |x| \approx 0$$

Ou seja $f'(0) = 0$. Utilizando as regras de derivação obtemos

$$f'(x) = \begin{cases} 2xsen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Seja agora k um hiper natural ímpar infinito e apontemos um microsópio de potência $(k\pi)^2$ ao ponto $(\frac{1}{k\pi}, 0)$.

$$\begin{aligned} v &= (k\pi)^2 \left(\frac{u}{(k\pi)^2} + \frac{1}{k\pi}\right)^2 sen\left(\frac{1}{\frac{u}{(k\pi)^2} + \frac{1}{k\pi}}\right) \\ &= \left(\frac{u^2}{(k\pi)^2} + \frac{2u}{k\pi} + 1\right) sen\left(\frac{(k\pi)^2}{u + k\pi}\right) \\ &\approx sen\left(\frac{(k\pi)^2}{u + k\pi}\right) = sen\left(k\pi - \frac{k\pi u}{u + k\pi}\right) \\ &= sen\left(\frac{k\pi}{u + k\pi} u\right) \\ &\approx sen(u) \end{aligned}$$

A função f é diferenciável e $f'(0) = 0$, mas uma imagem microscópica do seu gráfico em torno de $\frac{1}{k\pi} \approx 0$ é uma sinusóide. Os factos seguintes deveriam ser elucidativos.
Ainda com k ímpar e infinito

$$f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = 1 \not\approx 0;$$

mas, como $v \approx sen(u)$, com $u = \frac{1}{2}$ tem-se

$$\frac{f\left(\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2(k\pi)^2}\right) - f\left(\frac{1}{k\pi}\right)}{\frac{1}{2(k\pi)^2}} \approx 2sen(\frac{1}{2}) \not\approx 1$$

5.8 Funções exponenciais e suas inversas

Vamos agora esquematizar uma apresentação das funções exponenciais, partindo de funções de variável racional. A ideia será prolongar funções uniformemente contínuas em intervalos de $\mathbb{Q}$.
Esta forma de iniciar o estudo destas funções poderia seguir-se quando se não trata Cálculo Integral.
Uma maneira mais elementar (e para nós também mais bonita) de abordar este assunto é descrita em [9].
Alguns lemas.

Lema 5.1 *Valem as seguintes proposições:*

1. *Se* $\alpha \in \mathbb{Q}^+$*,a função* $x \mapsto x^\alpha$ *é crescente em* $\mathbb{R}^+$.

2. *Se* $a \in (\mathbb{Q} \cap]1, +\infty[)$*, então a função exponencial de base a é crescente em* $\mathbb{Q}$.

3. *Se a é um número real positivo e n é ilimitado em* ${}^*\mathbb{N}$*, então* $a^{\frac{1}{n}} \approx 1$.

E algumas consequências:

Teorema 5.8 *Valem as seguintes proposições:*

1. *Se* $a \in \mathbb{Q}^+$ *e r é um número hiperracinal em* **mon**, *então* $a^r \approx 1$.

2. *Se r é um número racional,* $r \approx 1$ *e x é um número racional positivo e limitado, então* $r^x \approx 1$

Com estes resultados pode provar-se que

Teorema 5.9 *Valem as seguintes proposições:*

1. *Para* $a \in \mathbb{Q}^+$ *a função exponencial de base a é uniformemente contínua em intervalos limitados de* $\mathbb{Q}$.

2. *Para* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *a função potência de expoente* α *é uniformemente contínua em intervalos limitados de* $\mathbb{Q}$.

As propriedades algébricas úteis para as provas de continuidade, podem demonstrar-se utilizando o teorema 1.4.

Cremos que o leitor já terá percebido que estaramos na altura de utilizar os teoremas 5.9 e 5.4 para provar a existncia de prolongamento contnuos a $\mathbb{R}$.

Seguir-se-iam a monotonia e, portanto, a injectividade e consequentemente a continuidade da inversa: o logaritmo.

6 Linguagem Formal

Os conceitos de Lógica Matemática que vamos apresentar de seguida fornecem uma terminologia com a qual se podem descrever com um formalismo mínimo as propriedades que temos vindo a utilizar.
Voltaremos a este tema na secção 7.2.

Definição 6.1 (Termo)

1. *As variáveis e as constantes são* termos
2. *Se f é um símbolo funcional n-ário e $t_1, t_2, \cdots, t_n$ são termos, então $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é um termo.*
3. *Não há mais termos além dos que se podem obter pelas duas regras anteriores.*

Definição 6.2 (Fórmula atómica)

1. *Se t_1 e t_2 são termos $t_1 = t_2$, $t_1 \approx t_2$ e $t_1 \in t_2$ são* fórmulas atómicas.
2. *Se ϕ é um símbolo predicativo n-ário e $t_1, t_2, \cdots, t_n$ são termos, então $\phi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ é uma fórmula atómica.*
3. *Não há mais fórmulas atómicas além das que se podem obter pelas duas regras anteriores.*

Definição 6.3 (Fórmula)

1. *As fórmulas atómicas são* fórmulas.
2. *Se ϕ, ϕ_1 e ϕ_2 são fórmulas $(\sim \phi)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ e $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$ são fórmulas.*
3. *Se ϕ é uma fórmula e x é uma variável, então $(\forall x \phi)$ e $(\exists x \phi)$ são fórmulas e nelas ϕ é o* campo de quantificação.
4. *Não há mais fórmulas além das que se podem obter pelas três regras anteriores.*

Uma fórmula diz-se limitada se todas as quantificações que nela ocorrem são de uma das seguintes formas (simplificadas), onde c designa uma constante e ϕ designa uma fórmula: $\forall x(x \in c \Rightarrow \phi)$ ou $\exists x(x \in c \wedge \phi)$.

Definição 6.4 (Proposição) *Uma variável é* livre *numa fórmula se não ocorre num campo de quantificação de alguma das suas subfórmulas, caso contrário diz-se* muda*. Uma* proposição *é uma fórmula sem variáveis livres.*

Princípio de Transferência

> *Uma proposição limitada sobre o universo clássico do Cálculo é verdadeira sse é verdadeira a sua *-transformada.*

Uma fórmula é **interna** se é limitada e não tem ocorrências de $\approx$ ou ${}^{\sigma}(\cdot)$. Uma fórmula é **standard** se é clássica e limitada ou é uma *-transformada de uma fórmula clássica limitada.

Princípio de Definição Standard

> *Os elementos clássicos bem como as suas *-extensões são standard. Um conjunto é standard sse é definido por uma fórmula standard.*

Princípio de Definição Interna

> *Os elementos de conjuntos standard são internos. Um conjunto (ou uma função) é interno (interna) sse é definido (definida) por uma fórmula interna*

Exercícios 6.1 Mostre que

1. Todo o subconjunto interno não vazio e majorado de ${}^*\mathbb{R}$ tem supremo.
2. Todo o subconjunto hiperfinito de número reais tem máximo.
3. O conjunto dos números infinitesimais não é interno.
4. O conjunto dos números finitos não é interno.
5. Os conjuntos ${}^{\sigma}\mathbb{N}$ e ${}^{\sigma}\mathbb{R}$ não são internos.

6. O conjunto dos números hiper-racionais standard estritamente entre 0 e 1 não é interno.

Os princípios que se seguem são úteis para passar de resultados "a menos de um infinitesimal" para correspondentes em termos de intervalos abertos de comprimento não infinitesimal. São consequências do Princípio de Transferência também designadas por *Lemas de Transbordo.* Podem, por exemplo, ser utilizados para demonstrar a equivalência entre as noções de continuidade e diferenciabilidade forte e as clássicas (teorema 5.2, por exemplo).

Princípio de Cauchy I

> *Um subconjunto interno de* $^*\mathbb{R}$ *que contém o conjunto dos infinitesimais, contém uma vizinhança standard de zero.*

De outra forma

Princípio de Cauchy II

> *Um subconjunto interno de* $^*\mathbb{R}$ *que contém a mónada de um número real* r*, contém uma vizinhança standard de* r*, isto é, contém um intervalo* $^*]\mathrm{r}-\varepsilon, \mathrm{r}+\varepsilon[$*, com* $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Exercícios 6.2 Mostre que

1. Todo o subconjunto interno de $^*\mathbb{R}$ que contenha todos os números infinitos, contém o complementar de algum intervalo standard.

2. Todo o subconjunto interno de $^*\mathbb{R}$ que contenha todos os números finitos, contém algum intervalo de extremos infinitos.

3. **(Lema de Robinson)** *Se todos os termos de índice finito de uma sucessão interna são infinitesimais, então os termos são infinitesimais até alguma ordem infinita.*

7 Fundamentos

Tal como não faz sentido exigir que a cada passo se considere um número real como, por exemplo, um Corte de Dedekind ou uma classe de equivalência de sucessões de Cauchy de números racionais, também esta secção nos interessa apenas como apresentação de um certo tipo de fundamentos.

7.1 Superestruturas

Nesta secção indicamos uma forma de codificar a Análise Matemática Clássica, de modo a definir rigorosamente os objectos sobre os quais incidirão os princípios apresentados na secção 2.2. Descrições mais detalhadas podem encontrar-se em [19].

bf Observação: Não faremos distinção terminológica entre os termos **função** e **aplicação**: *uma função* $f : A \to B$ *tem domínio* A. Para um conjunto $\mathcal{C}$ o símbolo $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ designa o conjunto **dos subconjuntos de $\mathcal{C}$.**

O **par ordenado** $(a, b) \in A \times B$ é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a **n-sequência ordenada** $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ pode entender-se como uma função com domínio $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Uma **função** $f : A \to B$ é um **conjunto** f **de pares ordenados** (x, y) tais que $x \in A$ & $y \in B$, e, se $(x, y), (x, z) \in f$ então $y = z$.

Exemplo 7.1 Uma função real de variável real é um **elemento** de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}\mathbb{R})))$; uma função de duas variáveis reais com imagens em $\mathbb{R}^2$ é **elemento de** $\mathcal{P}^{(6)}(\mathbb{R})$.

7.2 Modelos

Um **universo para a Análise Matemática Clássica** é então a **superestrutura de base** $\mathbb{R}$, designada por $\mathcal{R}$ e definida do seguinte modo

$$R_0 = \mathbb{R} \qquad R_{n+1} = \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} R_k\right) \ (n \in \mathbb{N}) \qquad \mathcal{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n.$$

Neste contexto, a linguagem formal pode ser significativamente simplificada (à custa do comprimento das fórmulas...): para formalizar as várias situações que interessam, são suficientes dois símbolos predicativos $\in$ e $=$, já que cada indivíduo do universo é elemento de algum dos níveis R_n.

Exemplo 7.2 De acordo com o exemplo 7.1, uma função real de variável real é um *elemento* de R_3 e um microscópio é um elemento de R_6.

A linguagem para a Análise Clássica será definida como na secção 6, com as seguinte alterações nas definições dos termos e fórmulas atómicas

Definição 7.1 (Termo)

1. *As variáveis e as constantes são termos*

2. *Não há mais termos além dos que se podem obter pela regra anterior.*

Definição 7.2 (Fórmula atómica)

1. *Se* t_1 *e* t_2 *são termos* $t_1 = t_2$, $t_1 \in t_2$ *são fórmulas atómicas.*

2. *Não há mais fórmulas atómicas além das que se podem obter pela regras anteriores.*

A "construção"de um modelo não-standard deste universo pode iniciar-se pela construção de uma **ultrapotência** de $\mathcal{R}$; essa ultrapotência contém uma de $\mathbb{R}$ para a qual escolhemos um conjunto equipotente designado por $^*\mathbb{R}$; seguidamente formamos a superestrutura baseada em $^*\mathbb{R}$ e define-se adequadamente (*Colapso de Mostowsky*) nível a nível a função de extensão $^*(\cdot)$ (veja-se, por exemplo, o capítulo 3 de [19]).
Mantendo-se as restantes definições e Princípios como na secção 2.2.

Exemplo 7.3 *Se a sucessão* $a :^* \mathbb{N} \rightarrow^* \mathbb{R}$ *é interna, então o conjunto dos números hipernaturais* k *tais que, para* n *de* 1 *a* k *se tem* $|a_n| < \frac{1}{n}$ *é interno.*

Com a presente linguagem formal, o exercício 6.1 é um extraordinário teste de atenção e paciência.
Observação Este processo pode ser iterado, de modo a que, para além dos princípios que já valem (secção 2.2) se verifiquem condições mais fortes.
Para dar uma ideia destas construções, vamos descrever um corpo ordenado que é extensão própria de $\mathbb{R}$.

7.3 Uma extensão própria do corpo real

Um *ultrafiltro* sobre $\mathbb{N}$ é um subconjunto $\mathcal{F}$ de partes de $\mathbb{N}$ que verifica as seguintes condições.

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$
- Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$
- Para qualquer $A \subseteq \mathbb{N}, \quad A \in \mathcal{F}$ ou $\mathbb{N} \backslash A \in \mathcal{F}$.

Os exemplos mais simples de ultrafiltros são os ultrafiltros *triviais*: para cada $n \in \mathbb{N}, \quad \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) |\ n \in A\}$.
A existência de ultrafiltros não triviais pode obter-se utilizando o *Lema de Zorn*.
Defina-se uma relação de equivalência $\equiv$ no conjunto das sucessões de números reais $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ do seguinte modo:

$$(a_n) \equiv (b_n) \quad se \quad \{n \in \mathbb{N} |\ a_n = b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Seja ${}^*\mathbb{R}$ o conjunto cociente $\mathbb{R}/\equiv$ e faça-se a seguinte algebrização.
Dados $a = [(a_n)], b = [(b_n)], c = [(c_n)]$ em ${}^*\mathbb{R}$,

- $a \ < \ b \quad sse \quad \{n \in \mathbb{N} |\ a_n < b_n\} \in \mathcal{F}$.
- $a \ + \ b \ = \ c \quad sse \quad \{n \in \mathbb{N} |\ a_n + b_n = c_n\} \in \mathcal{F}$.
- $a \ \cdot \ b \ = \ c \quad sse \quad \{n \in \mathbb{N} |\ a_n \cdot b_n = c_n\} \in \mathcal{F}$.

Algebrizado deste modo ${}^*\mathbb{R}$ fica um corpo ordenado com $zero = [(0)_{n\in\mathbb{N}}], \quad unidade = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$ e onde $\mathbb{R}$ é mergulhado pelo monomorfismo $r \mapsto^* r := [(r)_{n\in\mathbb{N}}]$
Neste corpo $[(\frac{1}{n})]$ é um infinitesimal; mas, se o conjunto dos números pares estiver em $\mathcal{F}$, também é infinitesimal a classe de equivalência da sucessão definida por $a_{2n} = e^{-2n} \quad \& \quad a_{2n-1} = e^{2n-1}$
Podemos continuar este processo para níveis superiores. Um conjunto A é estendido por uma classe ${}^*A = [(A_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ (obviamente a um nível superior a ${}^*\mathbb{R}$) em que todos os A_n são subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $\{n \in \mathbb{N} |\ A_n = A\} \in \mathcal{F}$, por exemplo todos os A_n podem ser A; um "elemento" de ${}^*A$ será uma classe $[(a_n)]$ tal que $\{n \in \mathbb{N} : \ a_n \in A_n\} \in \mathcal{F}$;
Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é prolongada a ${}^*A$ por uma função ${}^*f = [(f_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}, \ f_n : A_n \to \mathbb{R}$ e ${}^*f([(a_n)]) = [f_n(a_n))]$.
De um modo geral: um conjunto não standard será a classe de equivalência de uma sucessão de conjuntos e uma função não standard a classe de equivalência de uma sucessão de funções.
Com estas definições vale um Princípio de Transferência que permite fazer uma boa parte do Cálculo Elementar Não-Standard (veja-se por exemplo [17]).

8 Teoria dos Conjuntos Internos

Fazemos agora uma descrição sumária da axiomatização de Edward Nelson ([11]).
A linguagem formal é descrita como fizemos na secção 2.2, com uma ampliação (ligeira apenas na aparência): temos ao nosso dispor a linguagem da Teoria Formal de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel ([3]) — com os conectivos $\sim, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ — e correspondente Axiomática, bem como mais um símbolo predicativo st.
A essa linguagem acrescentam-se dois quantificadores designados por *quantificadores externos*

$$\forall^{st} \qquad \exists^{st},$$

a entender como abreviaturas de

$$\forall x(st(x) \Rightarrow \cdot) \quad \& \quad \exists x(st(x) \wedge \cdot);$$

e convém explicitar as consequentes regras de formação de fórmulas:

1. Se ϕ é uma fórmula, $\forall^{st}\phi$ também é uma fórmula.

2. Se ϕ é uma fórmula, $\exists^{st}\phi$ também é uma fórmula.

Não há ocorrências do símbolo *.

> *As* **fórmulas internas** são são as que não têm ocorrências do predicado st. Todas a soutras fórmulas são **externas.**

Eis os esquemas de axiomas
Observação: Os esquemas seguintes podem ser modificados para utilização na teoria que desenvolvemos nas secções anteriores (veja-se a contribuição de Keith Stroyan e Francine Diener em [5]).

Axioma de Transferência

Se $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ *é uma fórmula interna com únicas variáveis livres* $x_1, \cdots, x_n$*, então*

$$\forall^{st} x_1 \cdots \forall^{st} x_n \phi(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n \phi(x_1, \cdots, x_n)$$

Axioma de Idealização

Se $\phi(x, y)$ *é uma fórmula interna com variáveis livres* x *e* y*, então*

$$\forall^{st} z \,[z \text{ é } finito \;\Rightarrow \exists x \forall y \,(y \in z \Rightarrow \phi(x, y))] \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y \Phi(x, y)$$

Este axioma põe em evidência uma propriedade de grande importância prática, à qual corresponde a κ**-saturação** nos modelos que descrevemos anteriormente:

Dado um certo cardinal κ*, um modelo não-standard da Análise diz-se* κ-saturado *se qualquer família de conjuntos internos com menos de* κ *elementos não-standard, cujas subfamílias finitas têm intersecção não vazia, tem ela própria intersecção não vazia.*

Axioma de Standardização

Para qualquer fórmula $\phi(z)$ *com variável livre* z *e possivelmente outras variáveis livres, tem-se* $\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z \,(z \in y \;\equiv\; z \in x \;\wedge\; \phi(z))$

A exploração desta axiomática é delicada e não a intentaremos aqui. Limitamo-nos a alguns exemplos muito simples.

Exemplo 8.1 *Dois números reais standard infinitamente próximos são iguais.* Vejamos:
Designem-se os dois números em causa por a e b; por hipótese vale

$$\forall^{st} n (n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a - b| < \frac{1}{n})$$

O campo de quantificação é uma fórmula standard; pelo Axioma de Transferência vale

$$\forall (n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a - b| < \frac{1}{n})$$

portanto $a = b$. $\square$

Exercícios 8.1 *Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é contínua em $a\in\mathbb{R}$ sse sempre que $x\approx a$ se tem $f(x)\approx f(a)$.*

Para uma apreciação das potencialidades de apresentação do Cálculo elementar sem recurso a extensões, vale bem a pena o estudo das referências [3],[10] e [11]. O texto de [15] desenvolve-se dentro deste mesmo espírito, de uma forma talvez mais leve, para além do Cálculo.

Teorema 8.1 *Seja X um conjunto. Todos os elementos de X são standard sse X é finito.*

Dem. Esta é essencialmente uma aplicação do Axioma de Internalização.
Seja $\Phi(x,y) = x\in X \;\wedge\; x\neq y$.

$$\begin{aligned} \forall x\in X st(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists^{st} z[z \text{ é } finito \wedge \forall x\exists y\in z x\notin X \;\vee\; x=y] && (15)\\ &\Leftrightarrow \quad \exists z[X\subseteq z]. && (16)\end{aligned}$$

□

Terminamos com uma "provocação".

Teorema 8.2 *Existe um conjunto finito F tal que, para qualquer x standard, $x\in F$.*

Dem. Veja [11], página 1167, ou medite sobre a fórmula $x\in F \;\wedge\; F \text{ é } finito.$ □

9 Digressão II

9.1 Equicontinuidade

Em geral, as demonstrações clássicas do Teorema de Peano passam por alguma forma do **Teorema de Ascoli** que, por sua vez, apela a famílias *uniformemente equicontínuas* de funções reais, nas quais se determina uma sucessão uniformente convergente para uma solução da equação diferencial.

Uma demonstração "elementar" usa a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ para escolha e controle dos termos de uma sucessão que é uniformemente de Cauchy ([2]) (mais pomposamente: uma sucessão de Cauchy no espaço de Banach das funções reais contínuas num intervalo compacto de *vtr*).

A aparente simplicidade da demonstração que apresentámos acima resulta, como é usual neste contexto, de podermos utilizar aproximações a um limite sem termos de nos preocupar com controle de tolerâncias. Na verdade a definição de família uniformemente contínua de funções e de extrema simplicidade em termos não standard.

Na verdade o próximo exercício pode ser resolvido com mais segurança considerando primeiro a secção seguinte, sobre superestruturas, já que apela a extensão de conjuntos de funções; apesar disso, um pouco de autoconfiança na intuição é perfeitamente suficiente para o resolver.

Exercícios 9.1

1. *Diz-se que uma família $\mathcal{F}$ de funções reais definidas num certo subconjunto X de $\mathbb{R}$ é* **equicontínua em** $x \in X$ *se, para qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ de modo que, seja qual for $y \in X$, se $|y - x| < \varepsilon$, se tem $|f(y) - f(x)| < \delta$, para* todas *as funções $f \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ é* **equicontínua em** X *se for equicontínua em todos os elementos de X. $\mathcal{F}$ é* **uniformemente equicontínua** *em X se para qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ de modo que, sejam quais forem $x, y \in X$, se $|y - x| < \varepsilon$, se tem $|f(y) - f(x)| < \delta$, para* todas *as funções $f \in \mathcal{F}$.* Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que

   (a) $\mathcal{F}$ é equicontínua sse para qualquer $x \in^* X$ tal que $st(x) \in X$, todas as funções $f \in^* \mathcal{F}$ são S-contínuas em x.

   (b) $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínua sse todas as funções $f \in^* \mathcal{F}$ são S-contínuas em ${}^*X$.

(c) $\mathcal{F}$ é equicontínua em $[a, b]$ sse é uniformemente equicontínua em $[a, b]$.

2. Determine subconjuntos de $\mathbb{R}$ onde as seguintes famílias de funções sejam equicontínuas e onde sejam uniformemente equicontínuas

   (a) $\mathcal{F} = \{x \mapsto sen(nx) : \ n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $\mathcal{G} = \{x \mapsto rx : \ |r| \leq M\}$

   (c) $\mathcal{H} = \{x \mapsto f(rx) : \ |r| \leq M\}$, para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua.

   (d) $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as funções reais definidas em $[0, 1]$ cujo gráfico é uma linha poligonal de declives inferiores em valor absoluto a uma constante fixa.

   (e) $\mathcal{C}$ é o conjunto de todas as primitivas de uma dada função contínua.

Referências Bibliogrŕficas

[1] **Arkeryd, L. & Cutland, N. & Ward Henson, C. (Eds.):** *Nonstandard Analysis, Theory and Applications,* Nato ASI Series, Kluwer 1997.

[2] **Coddington, Earl A. & Levinson, Norman:** *Theory of Ordinary Differential Equations,* Krieger 1984.

[3] **Deledicq, A. & Diener, M.:** *Leçons de Calcul Infinitesimal,* Armand Colin 1989.

[4] **Diener, M. & Lobry, C. (Ed):** *Analyse Non-Standard et Representation du Réel,* MES/CNRS 1985.

[5] **Diener, F. & Stroyan K. D.:** *Syntactical Methods in Nonstandard Analysis,* in Nonstandard Analysis and Its Applications, Nigel Cutland (Ed.) LMSST 10 CUP 1988.

[6] **Enderton, Herbert B.:** *A Mathematical Introduction to Logic,* Acad. Press 1972.

[7] **Keisler, H.J.:** *Elementary Calculus,* PWS 1986.

[8] ———**:** *Foundations of Infinitesimal Calculus,* PWS 1986.

[9] **McKinzie, Mark & Tuckey Curtis:** *Nonstandard Methods in the Precalculus Curriculum,* in Developments in nonstandard mathematics, Cutland, Neves, Sousa Pinto (eds.), Pitman Research Notes In Math. 336, Longman 1995

[10] **Lutz, R. & Makhlouf, A. & Meyer, E.:** *Fondement Pour Un Enseignement de L'Analyse En Termes D'Ordres De Grandeur,* APMEP 103 1996.

[11] **Nelson, E.:** *Internal Set Theory,* BAMS, Vol. 83 1977.

[12] **Neves, Vítor:** *Cálculo com Infinitesimais* (Curso APM 1997)

[13] ———**:** *Smoothness From Finite Points,* The Am. Math. Monthly V. 98, N1, January 1991.

[14] ——— **& Stroyan, K.:** *A Discrete Condition for Higher Order Smoothness,* Bol. SPM N 35, Outubro 1996.

[15] **Robert, A.:** *Functional Analysis and NSA*in Developments in nonstandard mathematics, Cutland, Neves, Sousa Pinto (eds.), Pitman Research Notes In Math. 336, Longman 1995

[16] **Robinson, Abraham:** *Nonstandard Analysis,* North-Holland 1974

[17] **Sousa Pinto, José:** *Introdução à Análise Elementar Não-Standard,* Bol. SPM N 22, Março 1992.

[18] ——————— **& Neves, Vítor:** Mónadas Topológicas, Bol. SPM N 35, Outubro 1996.

[19] **Stroyan, K.D. & Luxemburg, W.A.J.:** *Introduction To The Theory of Infinitesimals,* Acad. Press 1976.